



.Problema para ajudar na escola: Qual é o produto? (2)



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

O número M , apresentado a seguir, é um produto de vinte números:

$$M = \left(1 + \frac{3}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(1 + \frac{9}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{41}{400}\right).$$

Encontre o valor de M .

Solução

Efetuando a soma de cada parêntesis da expressão que define o número M obtemos:

$$M = \left(1 + \frac{3}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{5}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{7}{9}\right) \cdot \left(1 + \frac{9}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{41}{400}\right).$$

$$M = \left(\frac{4}{1}\right) \cdot \left(\frac{9}{4}\right) \cdot \left(\frac{16}{9}\right) \cdot \left(\frac{25}{16}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{441}{400}\right)$$

$$M = \left(\frac{\cancel{4}}{1}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{16}}{\cancel{9}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{25}}{\cancel{16}}\right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{441}{\cancel{400}}\right)$$

$$M = \left(\frac{1}{\cancel{1}}\right) \cdot \left(\frac{\boxed{441}}{1}\right)$$

$$\boxed{M = 441}$$

Se você avalia que os cancelamentos efetuados carecem de mais consistência, observe que, efetuando o produto genérico de dois fatores consecutivos da expressão que define M , obtemos

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2n+1}{n^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2}\right) &= \left(1 + \frac{2n+1}{n^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2n+3}{(n+1)^2}\right) \\ &= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{(n+1)^2+2n+3}{(n+1)^2}\right) \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{n^2+2n+1+2n+3}{(n+1)^2}\right) \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{n^2+4n+4}{(n+1)^2}\right) \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2}\right) \\ &= \left(\frac{\cancel{(n+1)^2}}{n^2}\right) \cdot \left(\frac{(n+2)^2}{\cancel{(n+1)^2}}\right). \end{aligned}$$

Note que o cancelamento entre o numerador de um fator e o denominador do fator sucessivo é, de fato, genérico. Portanto, no produto que define M , depois das simplificações, só sobrar o produto entre o denominador do primeiro fator e o numerador do segundo.

Participou da discussão o Clube **OCTETO MATEMÁTICO**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

