.Problema para ajudar na escola: Primos entre si – um desafio

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Dois números naturais são ditos **primos entre si** se o máximo divisor comum entre eles (mdc) for 1.
Quantos são os pares ordenados (a, b) formados por números naturais não nulos a e b, primos entre si, tais que $a + b = 1000$?

Solução

Seja a um número natural não nulo menor do que 1000.

(i) Observe, inicialmente, que se $a + b = 1000$, então $b = 1000 - a$ é também um número natural.

(ii) Se $a + b = 1000$, observe também que:

Se a for um número par, então b também é um número par.

Com efeito, se a **é um número par**, então $a = 2k_1$, para algum número natural não nulo k_1, $k_1 < 500$. Dessa forma, temos que:

$$b = 1000 - 2k_1 = 2(500 - k_1).$$

Se $t_1 = 500 - k_1$, então $b = 2t_1$, com $t_1 \in \mathbb{N}$, e assim concluímos que b **é par**.

Se a for um múltiplo de 5 então b também é um múltiplo de 5.

Com efeito, se a **é um número múltiplo de** 5, então $a = 5k_2$, para algum número natural não nulo k_2, $k_2 < 200$. Dessa forma, temos que:

$$b = 1000 - 5k_2 = 5(200 - k_2).$$

Se $t_2 = 200 - k_2$, então $b = 5t_2$, com $t_2 \in \mathbb{N}$, e assim concluímos que b **é múltiplo de** 5.

Dessa forma:

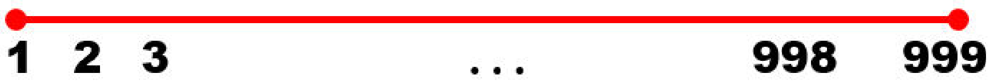
- ► Se a for par, então b é par e, portanto, a e b não são primos entre si.
- ► Se a for múltiplo de 5, então b é múltiplo de 5 e, portanto, a e b não são primos entre si.

(iii) Além de $a + b = 1000$, suponhamos agora que a não seja par e nem um múltiplo de 5 e que d seja um divisor comum de a e de b.
Sendo divisor de a e de b, necessariamente d é um divisor de 1000 e $1000 = 2^3 \times 5^3$. Mas os divisores de

d são divisores de a e como a não é par e nem múltiplo de 5, concluímos que só existe uma opção para d: $d=1$; e, portanto, a e b são primos entre si.

Perceba que, por (i), (ii) e (iii), conseguimos uma maneira indireta de contarmos as soluções do problema, pois o número de pares (a,b) de números naturais não nulos, primos entre si, tais que $a+b=1000$ é a quantidade de números naturais a, $0<a<1000$, tais que a não é par nem múltiplo de 5.

Vamos então à contagem.



De 1 a 999:

- existem 999 números naturais não nulos;
- existem 499 números pares;
- dos 500 números ímpares restantes, um quinto são múltiplos de 5: 100 números.

Logo, a quantidade de pares (a,b) de números naturais não nulos primos entre si tais que $a+b=1000$ é:

$$999-499-100=\boxed{400}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.