.Problema para ajudar na escola: Pares inteiros!

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Quantos pares de números inteiros (m,n) satisfazem a igualdade $\boxed{\dfrac{m^2}{2}+\dfrac{5}{n}=7}$?

Solução

Ao multiplicarmos a equação dada por 2 obtemos $\boxed{m^2+\dfrac{10}{n}=14}$. $\qquad (i)$

Veja que m e 14 são números inteiros; assim, $\dfrac{10}{n}$ é também um número inteiro. Portanto, n é um divisor de 10 e, assim, $n \in \{\pm1\,,\,\pm2\,,\,\pm5\,,\,\pm10\}$.

Vamos analisar, então, cada possibilidade para n, substituindo os seus possíveis valores na equação (i) e verificando se os valores que obteremos para m são números inteiros.

- Para $n=1$, obtemos:
$$m^2+\frac{10}{1}=14$$
$$m^2+10=14$$
$$m^2=4$$
$$m=\pm2\,.$$
Como 2 e -2 são números inteiros, então os pares $\boxed{(2,1)}$ e $\boxed{(-2,1)}$ satisfazem a igualdade.

- Para $n=2$, obtemos:
$$m^2+\frac{10}{2}=14$$
$$m^2+5=14$$
$$m^2=9$$
$$m=\pm3\,.$$
Como 3 e -3 são números inteiros, então os pares $\boxed{(3,2)}$ e $\boxed{(-3,2)}$ satisfazem a igualdade.

- Para $n=5$, obtemos:
$$m^2+\frac{10}{5}=14$$
$$m^2+2=14$$
$$m^2=12$$
$$m=\pm\sqrt{12}\,.$$
Como $\sqrt{12}$ e $-\sqrt{12}$ não são números inteiros, descartamos a possibilidade $n=5$.

- Para $n=10$, obtemos:
$$m^2+\frac{10}{10}=14$$
$$m^2+1=14$$
$$m^2=13$$
$$m=\pm\sqrt{13}\,.$$
Como $\sqrt{13}$ e $-\sqrt{13}$ não são números inteiros, descartamos a possibilidade $n=10$.

- Para $n=-1$, obtemos:
$$m^2+\frac{10}{-1}=14$$
$$m^2-10=14$$
$$m^2=24$$
$$m=\pm\sqrt{24}\,.$$
Como $\sqrt{24}$ e $-\sqrt{24}$ não são números inteiros, descartamos a possibilidade $n=-1$.

- Para $n=-2$, obtemos:
$$m^2+\frac{10}{-2}=14$$
$$m^2-5=14$$
$$m^2=19$$
$$m=\pm\sqrt{19}\,.$$
Como $\sqrt{19}$ e $-\sqrt{19}$ não são números inteiros, descartamos a possibilidade $n=-2$.

- Para $n=-5$, obtemos:
$$m^2+\frac{10}{-5}=14$$
$$m^2-2=14$$
$$m^2=16$$
$$m=\pm4\,.$$
Como 4 e -4 são números inteiros, então os pares $\boxed{(4,-5)}$ e $\boxed{(-4,-5)}$ satisfazem a igualdade.

- Para $n=-10$, obtemos:
$$m^2+\frac{10}{-10}=14$$
$$m^2-1=14$$
$$m^2=15$$
$$m=\pm\sqrt{15}\,.$$
Como $\sqrt{15}$ e $-\sqrt{15}$ não são números inteiros, descartamos a possibilidade $n=-10$.

Pelo exposto, são $\boxed{seis}$ os pares de números inteiros (m, n) que satisfazem a igualdade $\boxed{\dfrac{m^2}{2} + \dfrac{5}{n} = 7}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.