.Problema para ajudar na escola: Números versáteis

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

(**VIII ONEM**, 2011 – Adaptado) Vejam que propriedade interessante o número 1037 tem:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \\ \hline \mathbf{8} & \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{8} \end{array} +$$

Perceberam?

A soma de 1037 com 7301 é um *palíndromo* (ou capicua), isto é, um número que permanece o mesmo quando lemos os seus dígitos de "frente para trás" ou de "trás para frente".
Por esse motivo, 1037 é dito um número ***versátil***, de acordo com a seguinte definição:

> Um número natural de quatro dígitos é dito ***versátil*** se não for um múltiplo de 10 e, ao ser somado com o número que se obtém da inversão da ordem de seus algarismos, obtém-se um palíndromo de quatro dígitos.

Quantos números versáteis de quatro dígitos existem?

Lembrete:

✏️ **Princípio Fundamental da Contagem, ou Princípio Multiplicativo, para dois eventos**: Se

- um evento **E1** puder ocorrer de m_1 maneiras,
- um evento **E2** puder ocorrer de m_2 maneiras,

e esses dois eventos forem independentes entre si, então a quantidade de maneiras em que os dois eventos ocorrem ao mesmo tempo é $\boxed{m_1 \times m_2}$.

Solução

Seja $abcd$ um número versátil. (Antes de prosseguir, observe que aqui a notação $abcd$ não indica um produto e sim a representação de um número de quatro algarismos no sistema decimal.)

Assim, segundo a definição dada no problema, $P = abcd + dcba$ é um palíndromo com quatro algarismos.
Vamos observar os algarismos de milhar, centena, dezena e unidade da soma $P = abcd + dcba$ utilizando o esqueminha da adição.

$$\begin{array}{cccc} \color{red}{Mi} & \color{red}{Ce} & \color{red}{De} & \color{red}{Un} \\ a & b & c & d \; + \\ d & c & b & a \\ \hline \end{array}$$

- Como P tem quatro algarismos, a soma $a+d$ que define o algarismo dos milhares de P não pode ser maior do que 9, ou seja, $\boxed{a+d \leqslant 9}$. Como P é palíndromo seu algarismo das unidades é também $a+d$.
- Como o algarismo dos milhares é exatamente $a+d$, então, na definição do algarismo das centenas da soma $abcd+dcba$, a soma $b+c$ não leva uma unidade de milhar para a soma $a+d$. Dessa forma, $\boxed{b+c \leqslant 9}$. Como P é palíndromo, seu algarismo das dezenas é também $b+c$.

$$\begin{array}{cccc} \color{red}{Mi} & \color{red}{Ce} & \color{red}{De} & \color{red}{Un} \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ \hline a+d & b+c & b+c & a+d \end{array} +$$

Pronto, com as informações de que $\boxed{a+d \leqslant 9}$ e $\boxed{b+c \leqslant 9}$ já podemos contar quantos números versáteis existem.

Vamos lá!

(1) Para contar a quantidade de algarismos a e d, além da informação que $a+d \leqslant 9$, observe que o número $abcd$ tem quatro dígitos e não é um múltiplo de 10. Com isso, temos três condições: $\boxed{a+d \leqslant 9}$, $\boxed{1 \leqslant a}$ e $\boxed{1 \leqslant d}$.

- Para $a=1$, temos 8 possibilidades para d;
- para $a=2$, temos 7 possibilidades para d;
- para $a=3$, temos 6 possibilidades para d;
- para $a=4$, temos 5 possibilidades para d;
- para $a=5$, temos 4 possibilidades para d;
- para $a=6$, temos 3 possibilidades para d;
- para $a=7$, temos 2 possibilidades para d;
- para $a=8$, temos 1 possibilidade para d;
- não podemos ter $a=9$, pois, nesse caso, teríamos $d=0$.

Assim, temos $8+7+6+5+4+3+2+1=36$ **possibilidades para escolha simultânea de** a **e** d.

(2) Para contar a quantidade de algarismos b e c, além da informação de que $\boxed{0 \leqslant b, c \leqslant 9}$, utilizaremos a informação $\boxed{b + c \leqslant 9}$.

- para $b = 0$, temos 10 possibilidades para c;
- para $b = 1$, temos 9 possibilidades para c;
- para $b = 2$, temos 8 possibilidades para c;
- para $b = 3$, temos 7 possibilidades para c;
- para $b = 4$, temos 6 possibilidades para c;
- para $b = 5$, temos 5 possibilidades para c;
- para $b = 6$, temos 4 possibilidades para c;
- para $b = 7$, temos 3 possibilidades para c;
- para $b = 8$, temos 2 possibilidades para c;
- para $b = 9$, temos 1 possibilidade para c.

Logo, temos $10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 55$ possibilidades para escolha simultânea de b e c.

Finalmente, pelo Princípio Fundamental da Contagem, existem $\boxed{36 \times 55 = 1\,980}$ números versáteis de quatro dígitos/algarismos.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.