



.Problema para ajudar na escola: Números primos



Problema

(A partir do 8º ano do E. F.)

(CEFET-AL – 2013 – IF-AL – Adaptado) Todas as afirmações abaixo são relacionadas a números primos.

- (i) Dado um número primo, existe sempre um número primo maior que ele.
- (ii) Se dois números naturais não têm fatores primos iguais, então um deles é ímpar.
- (iii) Um número primo é sempre ímpar.
- (iv) O produto de três números naturais consecutivos é múltiplo de um primo.
- (v) A soma de três números naturais consecutivos é múltiplo de três, e três é primo.

- Verifique quais dessas afirmações são verdadeiras.

AJUDA

Quando um número natural n , $n > 1$, possui como divisores naturais apenas ele próprio e a unidade, dizemos que n é um **número primo**. Desta forma, são números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, entre muitos outros.

"**Existem infinitos números primos**" e isto pode ser demonstrado. (Neste momento, estamos interessados apenas no resultado e não em sua demonstração.) O primeiro matemático a demonstrar esse fato foi **Euclides** (matemático grego cuja biografia você pode encontrar na Biblioteca dos Clubes).

Outra característica importante dos números primos é que eles funcionam como blocos numéricos fundamentais, sendo responsáveis por gerar todos os números naturais diferentes de 0 e de 1". Esta propriedade é conhecida como **Teorema Fundamental da Aritmética** e ela garante que "**um número natural diferente de 0 e de 1 ou é um número primo ou pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, como produto de números primos**". (Neste momento, também não estamos interessados na demonstração desse resultado. Mas se você se interessou por esse Teorema, temos uma Sala aqui no Blog dedicada a ele. Você pode visitá-la mais tarde: é só clicar **AQUI**.)



O vídeo abaixo também pode ajudar...

Clique **AQUI** para abrir o vídeo.

Solução

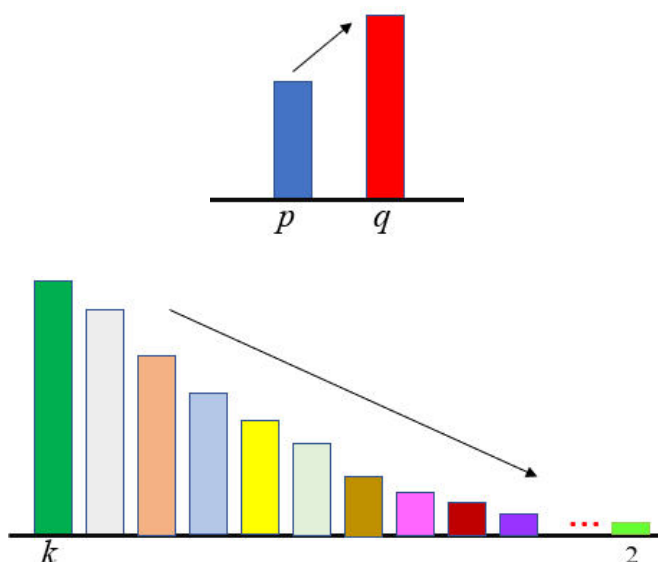
Vamos analisar uma a uma as cinco afirmações.

(i) Dado um número primo, existe sempre um número primo maior que ele.

Esta afirmação garante que, dado um número primo p , existe sempre um número primo q tal que $q > p$. Se ela não fosse verdadeira, existiria um número primo k tal que nenhum primo seria maior do que ele. Nesse caso, k seria o maior dentre todos os números primos e, portanto, teríamos no máximo k números primos. (As ilustrações abaixo talvez possam lhe ajudar a entender essa argumentação...)

Mas essa conclusão contrariaria o fato de existirem infinitos números primos, não é?

Dessa forma, a afirmação **(i)** não pode ser falsa.



Pelo exposto, garantimos que:

a afirmação (i) é VERDADEIRA.

(ii) Se dois números naturais não têm fatores primos iguais, então um deles é ímpar.

Dados dois números naturais quaisquer, uma (e somente uma) das seguintes condições é verdadeira:

- Ambos são pares.
- Ambos são ímpares.
- Um é par e o outro é ímpar.

Mas se soubermos que dois números não têm fatores primos iguais, eles não podem ser simultaneamente pares, pois, se o fossem, eles teriam o 2 como fator primo comum. Nesse caso, das três condições acima apenas uma das seguintes é verdadeira:

- Ambos são **ímpares**.
- Um é par e o outro é **ímpar**.

Portanto, se dois números não têm fatores primos iguais, então pelo menos um deles será ímpar.

Pelo exposto, garantimos que:

a afirmação (ii) é VERDADEIRA.

(iii) Um número primo é sempre ímpar.

Sabemos que o número 2 é divisível apenas por ele próprio e por 1. Assim, 2, que não é um número ímpar, é um número primo.

Portanto:

a afirmação (iii) é FALSA.

(iv) O produto de três números naturais consecutivos é múltiplo de um primo.

Seja a um produto de três números naturais consecutivos. Assim, existe um número natural n tal que $a = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)$.

- Se $a = 0$, a é múltiplo de qualquer número natural, em particular de um primo.
- Se a for não nulo, então $n \geq 1$, $n + 1 > 1$ e $n + 2 > 1$, donde $a = n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) > 1$. Pelo **Teorema Fundamental da Aritmética**, como $a > 1$, ou a é um número primo ou a pode ser escrito como produto de números primos.

Mas:

- como todo número é múltiplo de si próprio, se a for um número primo ele é múltiplo de um primo;
- se a for escrito como produto de números primos, em particular, ele é múltiplo de um primo.

De todo modo, um produto não nulo de três números naturais consecutivos é múltiplo de um primo.

De qualquer forma:

a afirmação (iv) é VERDADEIRA.

(v) A soma de três números naturais consecutivos é múltiplo de três, e três é primo.

Seja n um número natural qualquer e sejam seus consecutivos $n + 1$ e $n + 2$.

Observe que:

$$x = n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3 \cdot (n + 1) ,$$

ou seja, x é um múltiplo de 3.

Como 3 é um número primo, concluímos que

a afirmação (v) é VERDADEIRA.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

