.Problema para ajudar na escola: Números consecutivos

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Quantos números naturais menores do que 2018 satisfazem simultaneamente às propriedades abaixo?
(1) São soma de dois números naturais não nulos consecutivos.
(2) São soma de cinco números naturais não nulos consecutivos.

Solução

(I) Vamos analisar o que podemos afirmar sobre a forma de um número natural que satisfaz às propriedades **(1)** e **(2)**.

- Se x é um número natural que satisfaz à propriedade **(1)**, então existe um número natural não nulo n tal que
$$x = n + (n+1) = 2n+1\,.$$
Assim, $\boxed{x = 2n+1}$, para n um número natural tal que $n \geqslant 1$.
▷ Com isso, temos que x é um número ímpar tal que $x \geqslant 3$. $\quad (i)$
- Se x é um número natural que satisfaz à propriedade **(2)**, então existe um número natural não nulo m tal que
$$x = m + (m+1) + (m+2) + (m+3) + (m+4) = 5m+10 = 5(m+2)\,.$$
Logo, $\boxed{x = 5k}$, para k um número natural tal que $k \geqslant 3$.
▷ Com isso, temos que x é um múltiplo de 5 tal que $x \geqslant 15$. $\quad (ii)$

Dessa forma, se um número natural x satisfaz simultaneamente às propriedades **(1)** e **(2)**, por (i) e (ii), temos que x é um múltiplo ímpar de 5 maior do que ou igual a 15. Portanto, segue que:

$\boxed{x = 5(2t+1)}$, com t um número natural tal que $t \geqslant 1$. $\quad (iii)$

(II) Verificaremos agora que todo número natural x da forma estipulada em (iii) satisfaz às propriedades **(1)** e **(2)**.
Com efeito, se $x = 5(2t+1)$ é um número natural, observe que:

- $x = \dfrac{x-1}{2} + \left(\dfrac{x-1}{2} + 1\right)$
e as parcelas da soma são números naturais não nulos consecutivos, pois x é ímpar.
- $x = \left(\dfrac{x}{5} - 2\right) + \left(\dfrac{x}{5} - 1\right) + \dfrac{x}{5} + \left(\dfrac{x}{5} + 1\right) + \left(\dfrac{x}{5} + 2\right)$
e as parcelas da soma são números naturais não nulos consecutivos, pois x é ímpar.

Seja, então, x um número natural menor do que 2018 e que satisfaz simultaneamente às propriedades **(1)** e **(2)**. Assim, por (iii), existe um número natural $t \geqslant 1$ tal que $x = 5(2t+1) < 2018$, logo, segue que:

$$5(2t+1) < 2018$$
$$10t + 5 < 2018$$
$$10t < 2013$$
$$t < 201,3\,.$$

Mas, t é um número natural não nulo, logo $\boxed{1 \leqslant t \leqslant 201}$.
Como cada valor de t define um número x que satisfaz às condições do problema, consequentemente, existem $\boxed{201}$ números naturais menores do que 2018 que satisfazem simultaneamente às propriedades **(1)** e **(2)**.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.