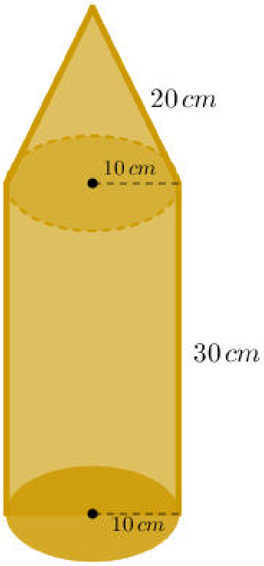
.Problema para ajudar na escola: Lembranças natalinas

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Uma escola encomendou para um artesão lembranças natalinas na forma de um lápis, para distribuir aos seus professores. Esses lápis foram confeccionados a partir de cones e cilindros circulares retos, como mostra a figura abaixo.
Qual a área lateral, a área total e o volume de cada um desses lápis?

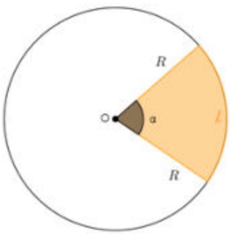


(Problema adaptado do livro **Matemática, volume único**– Gelson Iezzi & outros)

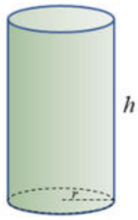
Lembretes

Área de um setor circular de raio R e comprimento de arco l:

$$\boxed{A_{setor} = \frac{l \times R}{2}}$$



(Para aprender um pouco mais sobre **setor circular**, clique **AQUI**.)

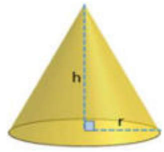


✏ Volume de um cilindro circular reto cujo comprimento da altura é h e o comprimento do raio da base é r:

$$\boxed{Volume = \pi\, r^2 h}\ .$$

✏ Volume de um cone circular reto cujo comprimento da altura é h e o comprimento do raio da base é r:

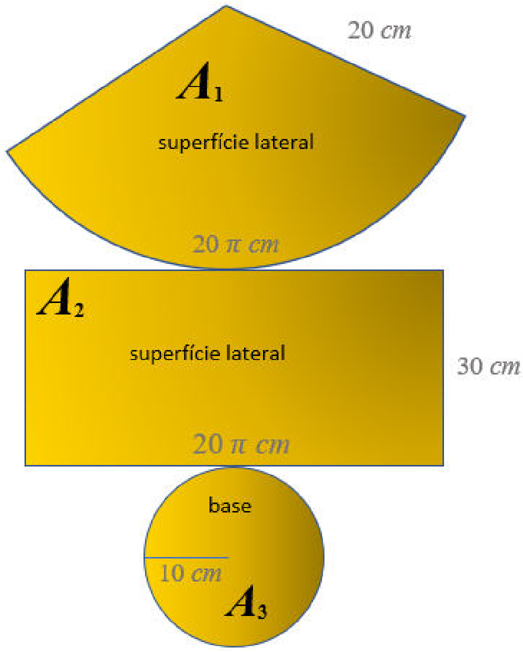
$$\boxed{Volume = \frac{\pi r^2 h}{3}}.$$



Solução

(a) A figura ao lado mostra que a superfície lateral do lápis é a superfície lateral de um cilindro circular reto e a superfície lateral de um cone circular reto:

- a superfície lateral do cilindro é um retângulo de dimensões $20\,\pi$ (comprimento da circunferência da base) e 30;
- a superfície lateral do cone é um setor circular de raio 20 (geratriz do cone) e cujo comprimento de arco é $20\,\pi$ (comprimento da circunferência da base).



Assim, a área lateral A_{lat} é a soma das áreas A_1 e A_2 indicadas na figura.
Vamos calculá-las.

- Área do retângulo:

$$A_2 = 20\,\pi \times 30 = 600\,\pi\, cm^2\ .$$

- Área do setor circular:

Utilizando a primeira fórmula do **Lembrete**, temos que:

$$A_1 = \frac{20\,\pi \times 20}{2} = 200\,\pi\, cm^2\ .$$

Assim,

$$A_{lat} = A_1 + A_2 = 200\,\pi + 600\,\pi = 800\,\pi\ \ ,$$

ou seja, a área lateral do lápis é $\boxed{800\,\pi\, cm^2}$.

(b) A figura lateral acima nos indica que a área total do lápis, A_t, é a soma $A_1 + A_2 + A_3$, sendo A_3 a área de um círculo de raio $10\, cm$.
Já temos os valores A_1 e A_2; vamos calcular A_3:

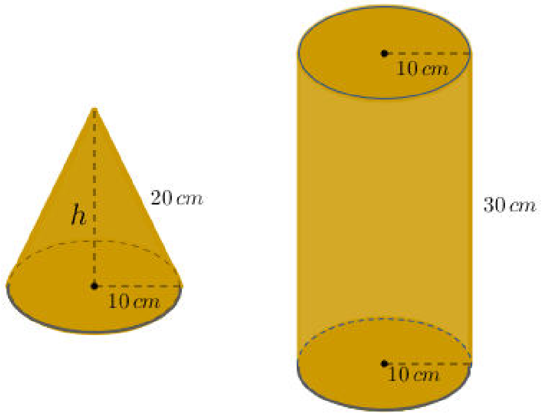
$$A_3 = 10^2 \times \pi = 100\,\pi\ .$$

Portanto:

$$A_t = A_1 + A_2 + A_3 = 200\,\pi + 600\,\pi + 100\,\pi = 900\,\pi$$

e, com isso, a área total do lápis é $\boxed{900\,\pi\, cm^2}$.

(c) O volume V do lápis é a soma do volume V_{cone} de um cone circular reto e do volume V_{cil} de um cilindro circular reto.



Façamos os cálculos:

- Volume de um cone circular reto com raio da base $10\,cm$ e altura h, sendo h o segundo cateto de um triângulo retângulo de hipotenusa com comprimento $20\,cm$ e um cateto com comprimento $10\,cm$ (terceira fórmula do **Lembrete**):

  $$V_{cone} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot h}{3}\,.$$

  Aqui precisaremos do valor de h. Para isso, utilizaremos o Teorema de Pitágoras:

  $$h^2 + 10^2 = 20^2$$
  $$h^2 = 400 - 100$$
  $$h^2 = 300$$
  $$h = 10\sqrt{3}.$$

  Finalizando o cálculo do volume, obtemos:

  $$V_{cone} = \frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 10\sqrt{3}}{3} = \frac{1000\sqrt{3}\,\pi}{3}\;cm^3\,.$$

- Volume de um cilindro circular reto com raio da base $10\,cm$ e altura $30\,cm$ (segunda fórmula do **Lembrete**):

  $$V_{cil} = \pi \cdot 10^2 \cdot 30 = 3000\,\pi\,cm^3\,.$$

Portanto, segue que:

$$V = V_{cone} + V_{cil}$$
$$V = \frac{1000\sqrt{3}\,\pi}{3} + 3000\,\pi$$
$$V = \frac{1000\sqrt{3}\,\pi + 9000\,\pi}{3}$$
$$V = \frac{1000\pi}{3} \cdot \left(\sqrt{3} + 9\right)\,.$$

Temos, então, que o volume do lápis é $\boxed{\frac{1000\pi}{3} \cdot \left(\sqrt{3}+9\right)\;cm^3}$, ou aproximadamente, $\boxed{11\,232,88\,cm^3}$, ou ainda, $\boxed{11,2\,dm^3}$.

dm^3	cm^3	mm^3

$\times\,1000$ ($dm^3 \to cm^3$), $\times\,1000$ ($cm^3 \to mm^3$); $\div\,1000$ ($cm^3 \to dm^3$), $\div\,1000$ ($mm^3 \to cm^3$)

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.