.Problema para ajudar na escola: Função par, função ímpar

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Uma função $f : A \to B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$, é dita uma função par, se $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in A$.
Se $f(-x) = -f(x)$, para todo $x \in A$, então f é dita uma função ímpar.

- Por exemplo, a função
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$
é uma função par, já que
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

- Já a função
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3$$
é ímpar, uma vez que
$$f(-x) = (-x)^3 = ((-1) \cdot (x))^3 = (-1)^3 \cdot (x)^3 = -\left(x^3\right) = -f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

- No entanto a função
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^3 - 1$$
não é par e nem ímpar. Por exemplo,
$f(-1) = -2 \neq 0 = f(1)$ e $f(-1) = -2 \neq 0 = -f(1)$.

Considere a função real definida por $f(x) = \dfrac{x}{1-2^x} - \dfrac{x}{2}$.
(a) Determine o domínio máximo de f.
(b) Com esse domínio, f é uma função par, ou ímpar ou nem par e nem ímpar?

Solução

(a) Seja a função $f : A \to B$, com $A, B \subset \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x}{1-2^x} - \dfrac{x}{2}$.
Determinar o domínio máximo de f significa determinar o conjunto A formado por **todos** os números reais que podem ser colocados no lugar de x na lei de formação $y = f(x)$ de modo que, efetuados os cálculos, obtenhamos um número real y.
Inicialmente, perceba que $\dfrac{x}{2}$ é um número real, independente do valor real que x assuma. Assim, para que $\dfrac{x}{1-2^x} - \dfrac{x}{2}$ seja um número real, basta que $\dfrac{x}{1-2^x}$ seja um número real. Mas, sabemos que um quociente entre números reais não está definido somente se o seu denominador for igual a 0; portanto, a única restrição a ser imposta é que $1 - 2^x \neq 0$.
Vamos então determinar para quais valores de x temos $1 - 2^x = 0$ ou, de maneira equivalente, $2^x = 1$. Mas

essa igualdade só ocorrerá se $x = 0$; portanto, o domínio máximo da função f é $\boxed{A = \mathbb{R} - \{0\}}$. Em termos de intervalo, temos $\boxed{A = \left]-\infty\,,\,0\right[\cup\left]0\,,\,+\infty\right[}$.

(b) Observe que, para $x \in \left]-\infty\,,\,0\right[\cup\left]0\,,\,+\infty\right[$, segue que:

$$f(-x) = \frac{-x}{1-2^{-x}} - \frac{-x}{2}$$
$$f(-x) = \frac{-x}{1-\frac{1}{2^x}} + \frac{x}{2}$$
$$f(-x) = \frac{-x\cdot 2^x}{2^x-1} + \frac{x}{2}$$
$$f(-x) = \frac{-2x\cdot 2^x + x\cdot(2^x-1)}{2\,(2^x-1)}$$
$$f(-x) = \frac{-2x\cdot 2^x + x\cdot 2^x - x}{2\,(2^x-1)}$$
$$f(-x) = \frac{-x\cdot 2^x - x}{2\,(2^x-1)}$$
$$f(-x) = \frac{x\cdot 2^x + x}{2\,(1-2^x)}. \qquad (i)$$

$$f(x) = \frac{x}{1-2^x} - \frac{x}{2}$$
$$f(x) = \frac{2x - x\cdot(1-2^x)}{2\,(1-2^x)}$$
$$f(x) = \frac{2x - x + x\cdot 2^x}{2\,(1-2^x)}$$
$$f(x) = \frac{x + x\cdot 2^x}{2\,(1-2^x)}$$
$$f(x) = \frac{x\cdot 2^x + x}{2\,(1-2^x)}. \qquad (ii)$$

Por (i) e (ii), segue que $f(x) = f(-x), \forall x \in \left]-\infty\,,\,0\right[\cup\left]0\,,\,+\infty\right[$, o que nos garante que f é uma função par.

Como não temos $f(-x) = -f(x), \forall x \in \left]-\infty\,,\,0\right[\cup\left]0\,,\,+\infty\right[$, f não é uma função ímpar.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Participou da discussão o Clube **OCTETO MATEMÁTICO**.