.Problema para ajudar na escola: Expressões equivalentes?

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(**UNIFOR** – CE) Sejam a e b números reais tais que $a \neq \pm b$.

A expressão

$$\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{a^2+ab}{a^2+2ab+b^2}$$

equivale à expressão

$$\frac{2}{a-b}\ ?$$

Ajuda

Para resolver este problema, faremos uso dos seguintes produtos notáveis importantes:

(01) $\quad (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2\,;\ \forall\, a,\, b\, \in \mathbb{R}.$

(02) $\quad a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)\,;\ \forall\, a,\, b \in \mathbb{R}.$

Para relembrar estes e outros produtos notáveis, vocês podem conferir a **Sala de Estudos Malabarismos Aritméticos e Algébricos**.

Solução

Sejam a e b números reais tais que $a \neq \pm b$ e observe a seguinte sequência de igualdades equivalentes:

$$\boxed{\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{a^2+ab}{a^2+2ab+b^2}} = \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{a\,(a+b)}{a^2+2ab+b^2}$$

$$\overset{(01)}{=} \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{a\,(a+b)}{(a+b)^2}$$

$$= \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{a\,\cancel{(a+b)}}{(a+b)\,\cancel{(a+b)}}$$

$$\overset{(02)}{=} \frac{a^2+ab}{(a+b)\,(a-b)}-\frac{a}{(a+b)}$$

$$= \frac{a^2+ab}{(a+b)\,(a-b)}-\frac{a\,(a-b)}{(a+b)\,(a-b)}$$

$$= \frac{a^2+ab}{(a+b)\,(a-b)}-\frac{a^2-ab}{(a+b)\,(a-b)}$$

$$\overset{(02)}{=} \frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{a^2+ab-(a^2-ab)}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{a^2+ab-a^2+ab}{a^2-b^2}$$

$$= \frac{\cancel{a^2}+ab-\cancel{a^2}+ab}{a^2-b^2}$$

$$= \boxed{\frac{2ab}{a^2-b^2}}$$

Por essa sequência, concluímos que $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2+ab}{a^2+2ab+b^2}=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$.

Para que a expressão $\dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\dfrac{a^2+ab}{a^2+2ab+b^2}$ seja equivalente à expressão $\dfrac{2}{a-b}$ para quaisquer números reais a e b tais que $a \neq \pm b$, devemos ter $\dfrac{2}{a-b}=\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ e, assim:

$$\frac{2}{a-b}=\frac{2ab}{a^2-b^2}$$

$$\frac{2}{a-b}=\frac{2ab}{(a+b)\,(a-b)}$$

$$\frac{\cancel{2}}{\cancel{a-b}}=\frac{\cancel{2}ab}{(a+b)\,\cancel{(a-b)}}$$

$$1=\frac{ab}{a+b}$$

$$ab=a+b.$$

Dessa forma, para que a equivalência das expressões ocorra, deveríamos ter números reais a e b, $a \neq \pm b$, cuja soma fosse igual ao produto. Portanto, para números reais a e b **quaisquer**, com $a \neq \pm b$, não temos a equivalência proposta.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.