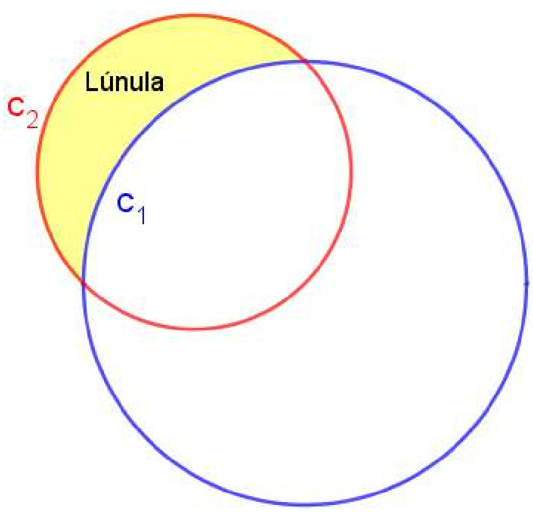
.Problema para ajudar na escola: Duas lúnulas coloridas

Problema

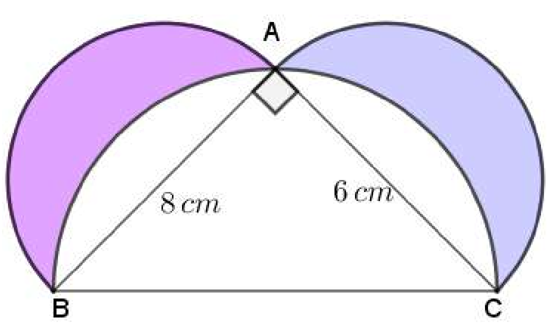
(A partir da 1ª série do E. M.)

Informalmente, chamamos de **lúnula** a figura geométrica limitada por dois arcos circulares de raios distintos.
A figura a seguir mostra uma lúnula definida por um arco da circunferência C_1 e um arco da circunferência C_2.



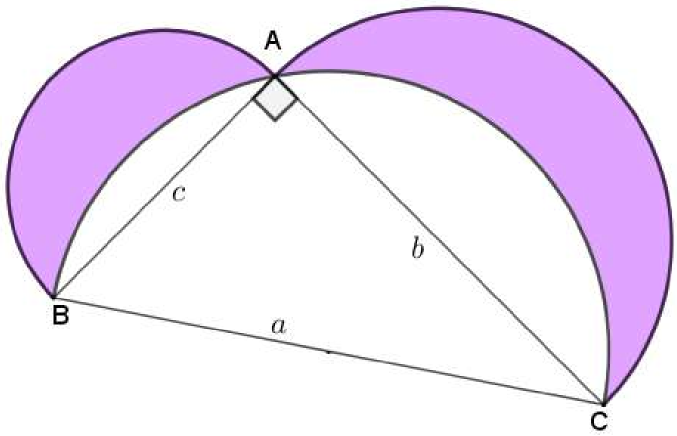
Segundo a História da Matemática, as lúnulas foram objeto de estudo do matemático grego ***Hipócrates de Chios/Quios***, nascido na ilha de Chios, do século V A.C. (Não confunda o Hipócrates das lúnulas com outro: *Hipócrates de Cos*, conhecido como o Pai da Medicina Moderna.)

(a) A figura abaixo mostra um triângulo retângulo de catetos $6\,cm$ e $8\,cm$ e três semicircunferências tendo os lados desse triângulo como diâmetros.



Determine a soma das áreas das duas lúnulas coloridas.

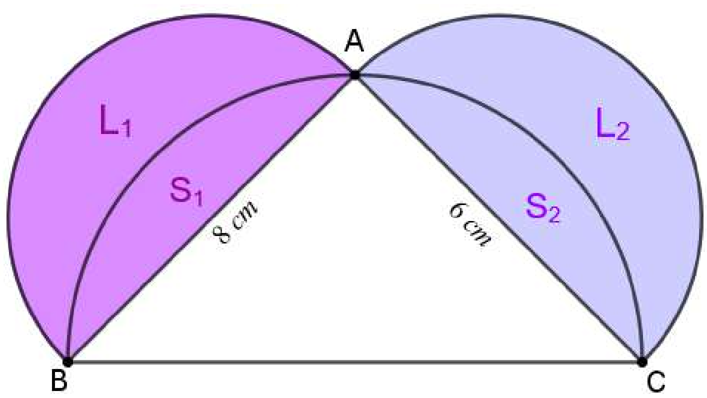
(b) Tente estabelecer o caso geral da soma das áreas de duas lúnulas definidas por arcos cujos diâmetros são os lados de um triângulo retângulo de catetos com comprimentos b e c e hipotenusa medindo a.



Solução

(a) Se denominarmos as áreas das duas lúnulas por L_1 e L_2, conforme mostra a figura abaixo, observamos que a área de cada lúnula é a área do respectivo semicírculo que a define menos a respectiva área dentre as que denotamos por S_1 e S_2. Como a área do semicírculo de diâmetro $\overline{AB}$ é $\dfrac{\pi\,4^2}{2}=8\pi$ e a área do semicírculo de diâmetro $\overline{AC}$ é $\dfrac{\pi\,3^2}{2}=\dfrac{9\pi}{2}$, segue que:

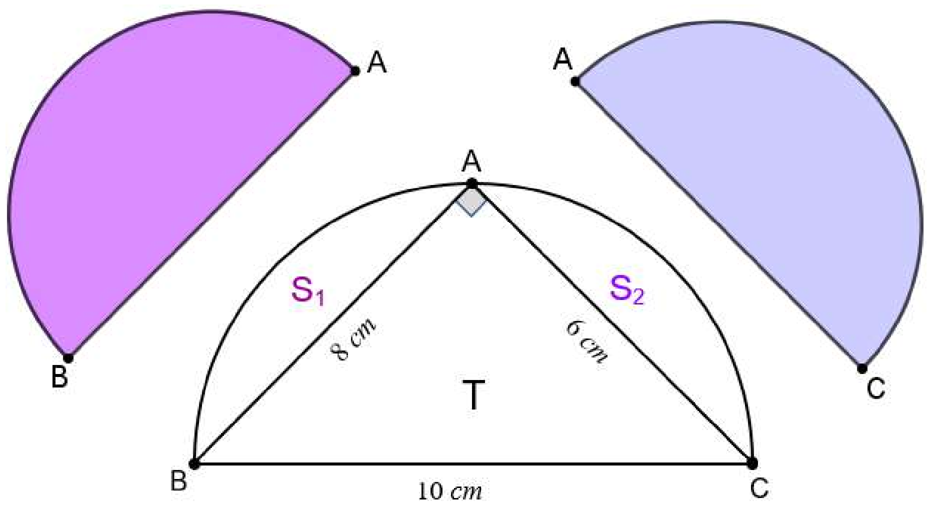
$$\boxed{L_1=8\pi-S_1} \qquad \text{e} \qquad \boxed{L_2=\frac{9\pi}{2}-S_2}\,. \qquad (i)$$



Assim, por (i), a soma das áreas das duas lúnulas coloridas é

$$\boxed{L_1+L_2=\left(8\pi+\frac{9\pi}{2}\right)-(S_1+S_2)} \qquad (ii)$$

e, portanto, precisamos determinar a soma de áreas S_1+S_2. A próxima figura indica que a soma S_1+S_2 é dada pela diferença entre a área do semicírculo de diâmetro $\overline{BC}$ e a área do triângulo retângulo ABC.
O Teorema de Pitágoras nos permite concluir que o comprimento h da hipotenusa do triângulo ABC é tal que $h^2=6^2+8^2=100$, donde segue que $h=10\,cm$.



Com isso, segue que $S_1+S_2=\dfrac{\pi\,5^2}{2}-T$ e, como o triângulo ABC é retângulo, $T=\dfrac{6\times 8}{2}=24.$ Portanto:

$$\boxed{S_1+S_2=\frac{25\,\pi}{2}-24}. \qquad (iii)$$

Finalmente, por (ii) e (iii), obtemos que

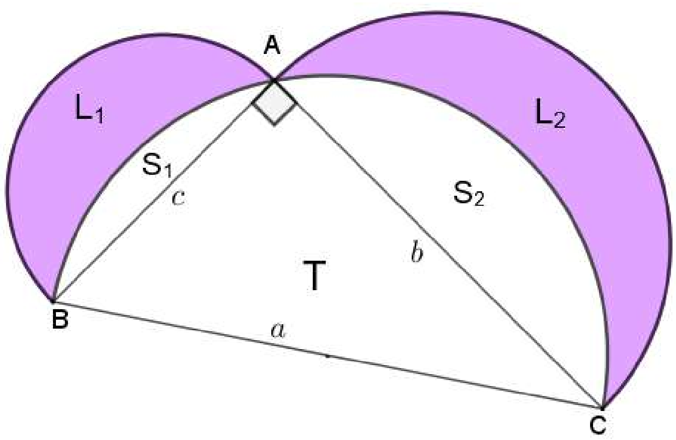
$$L_1+L_2=\left(8\pi+\frac{9\pi}{2}\right)-(S_1+S_2)$$
$$L_1+L_2=\left(\frac{25\,\pi}{2}\right)-\left(\frac{25\,\pi}{2}-24\right)$$
$$L_1+L_2=24\,cm^2.$$

Logo, a soma das áreas das duas lúnulas coloridas é $\boxed{24\,cm^2}$.

(b) À primeira vista, é surpreendente que uma área que envolva áreas de semicírculos e, consequentemente, o número π, seja um número racional; no nosso caso, até inteiro. Mais ainda, note que a soma das áreas em questão é igual à área do triângulo retângulo, cujos lados definiram as duas lúnulas.

Coincidência?

Vamos mostrar que não. Para isso repetiremos o raciocínio que desenvolvemos no item **(a)**, para um triângulo retângulo genérico de lados a, b, c.



Observe que:

- Área do semicírculo de diâmetro $\overline{AB}: L_1+S_1$
$$\frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2}=L_1+S_1 \qquad (i)$$
- Área do semicírculo de diâmetro $\overline{AC}: L_2+S_2$
$$\frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}=L_2+S_2 \qquad (ii)$$
- Área do triângulo ABC
$$\frac{b\times c}{2}=T \qquad (iii)$$

Somando as equações (i), (ii) e (iii), segue que:

$$\frac{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2}+\frac{\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2}+\frac{b\times c}{2}=(L_1+S_1)+(L_2+S_2)+T$$
$$\frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)+\frac{b\times c}{2}=(L_1+L_2)+(S_1+S_2+T)$$
$$\frac{\pi}{8}\left(b^2+c^2\right)+\frac{b\times c}{2}=(L_1+L_2)+(S_1+S_2+T). \qquad (iv)$$

Como o triângulo ABC é retângulo, o Teorema de Pitágoras nos garante que $b^2+c^2=a^2$. Assim, segue de (iv) que:

$$\frac{\pi}{8}a^2+\frac{b\times c}{2}=(L_1+L_2)+(S_1+S_2+T). \qquad (v)$$

Mas S_1+S_2+T é a área do semicírculo de diâmetro $\overline{BC}$; assim, $S_1+S_2+T=\frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2}=\frac{\pi}{8}a^2$ e, por (v), temos que:

$$\frac{\pi}{8}a^2+\frac{b\times c}{2}=(L_1+L_2)+\underbrace{(S_1+S_2+T)}_{\frac{\pi}{8}a^2}$$

$$\cancel{\frac{\pi}{8}a^2}+\frac{b\times c}{2}=(L_1+L_2)+\cancel{\frac{\pi}{8}a^2}.$$

Portanto, $\frac{b\times c}{2}=L_1+L_2$ e, de fato, a soma das áreas das lúnulas em questão é a área do triângulo ABC.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Um applet para ilustrar. . .

Você pode visualizar a construção das duas lúnulas do problema utilizando o *applet* abaixo. Para isso é só esperar o aplicativo carregar completamente e clicar sucessivamente nos quadradinhos que irão aparecer.

Para retornar à configuração inicial, clique nas setinhas que aparecem no canto superior direito do aplicativo.

Clique AQUI para abrir o applet

OBMEP_srg, criado com o GeoGebra