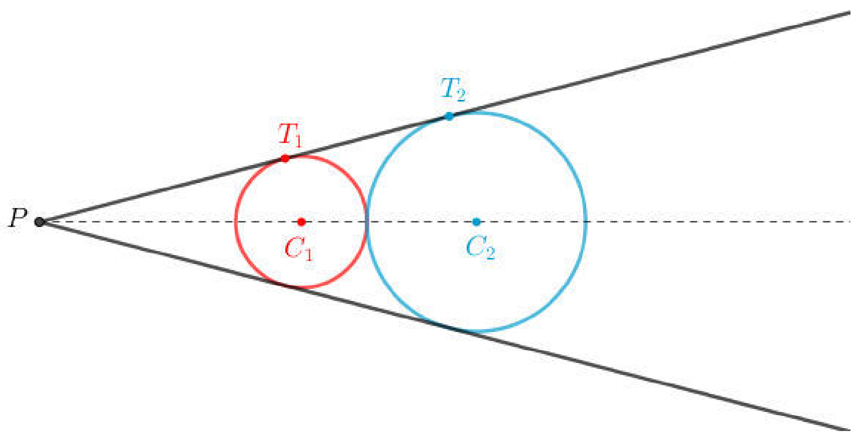
.Problema para ajudar na escola: Distância entre pontos de tangência – um desafio

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

As circunferências de centro C_1 e C_2 mostradas na figura têm raios com comprimentos $3\,cm$ e $5\,cm$, respectivamente, são tangentes exteriores e as retas tangentes a ambas se intersectam no ponto P.



Observando que os pontos P, C_1 e C_2 são colineares, calcule a distância entre os pontos de tangência T_1 e T_2.

Lembretes

(1) Caso de Semelhança A.A. (ângulo – ângulo): Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então estes triângulos são semelhantes.

(2) Em triângulos semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais.

(Há uma **Sala de Ajuda** sobre triângulos semelhantes no nosso Blog!)

(3) Uma reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no seu ponto de tangência.

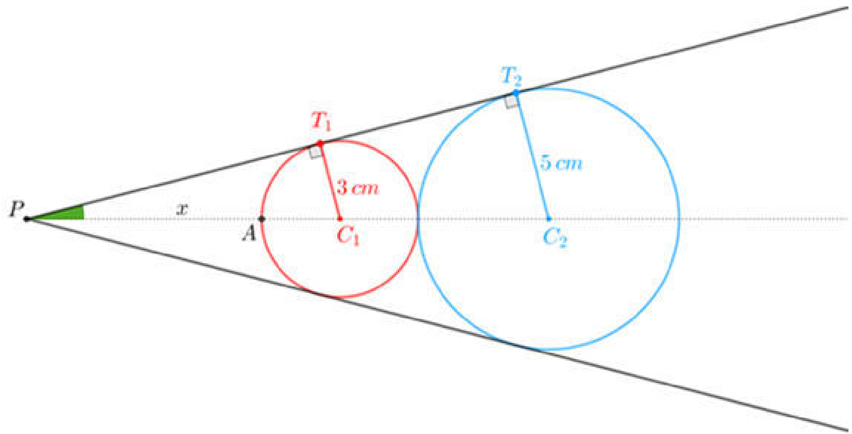
(4) Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.

Solução

Como T_1 e T_2 são pontos de tangência das circunferências de centro C_1 e C_2, respectivamente, então os segmentos C_1T_1 e C_2T_2 são perpendiculares à reta T_1T_2.

Dessa forma, os triângulos retângulos ΔPT_1C_1 e ΔPT_2C_2 são semelhantes, já que têm um ângulo reto cada e o ângulo $C_2\hat{P}T_2$ é comum aos dois triângulos.

Na nossa discussão denotaremos por A o ponto de interseção da reta PC_1 com a circunferência de centro C_1 e por x o comprimento do segmento PA.



Como ΔPT_1C_1 e ΔPT_2C_2 são triângulos semelhantes, então podemos utilizar o Lembrete 2 e concluir que:

$$\frac{5}{3} = \frac{x+11}{x+3}$$

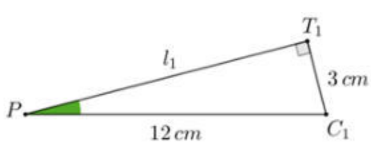
$$5(x+3) = 3(x+11)$$

$$5x + 15 = 3x + 33$$

$$2x = 18$$

$$\boxed{x = 9}\ .$$

Com o valor de x, obtemos as hipotenusas dos triângulos ΔPT_1C_1 e ΔPT_2C_2; vamos calcular os respectivos segundos catetos, para poder obter a distância entre os pontos T_1 e T_2.



Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos que:

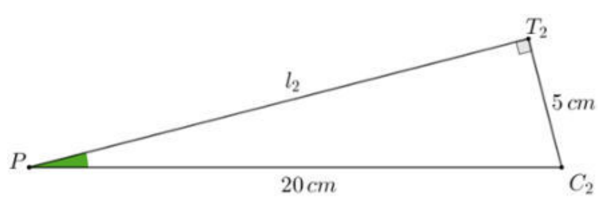
$$l_1^2 + 3^2 = 12^2$$

$$l_1^2 = 135$$

$$l_1 = \pm\sqrt{135}.$$

Como l_1 é um comprimento, $l_1 > 0$, logo:

$$\boxed{l_1 = \sqrt{135}\ cm}.$$



Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos que:

$$l_2^2 + 5^2 = 20^2$$

$$l_2^2 = 375$$

$$l_2 = \pm\sqrt{375}.$$

Como l_2 é um comprimento, $l_2 > 0$, logo:

$$\boxed{l_2 = \sqrt{375}\ cm}.$$

Com esses dados estamos prontos para calcular a distância entre os pontos de tangência, a qual denotaremos por d:

$$d = \sqrt{375} - \sqrt{135} \approx 19,36 - 11,62.$$

(Cuidado, $\sqrt{375} - \sqrt{135} \neq \sqrt{375 - 135}$.)

► Portanto, a distância entre os pontos de tangência T_1 e T_2 é aproximadamente $\boxed{7,74\,cm}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.