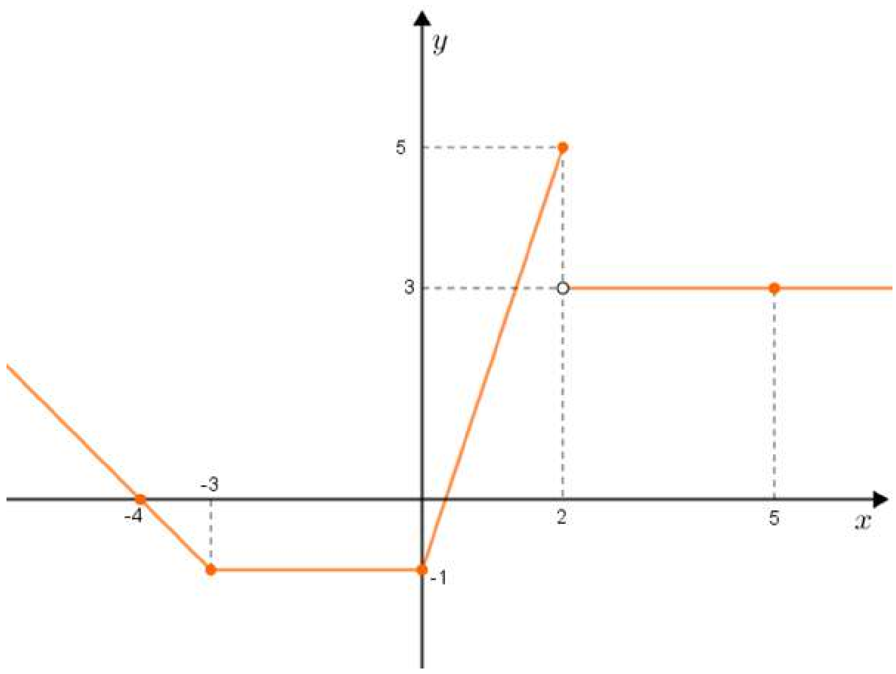
.Problema para ajudar na escola: Determine f(x)

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

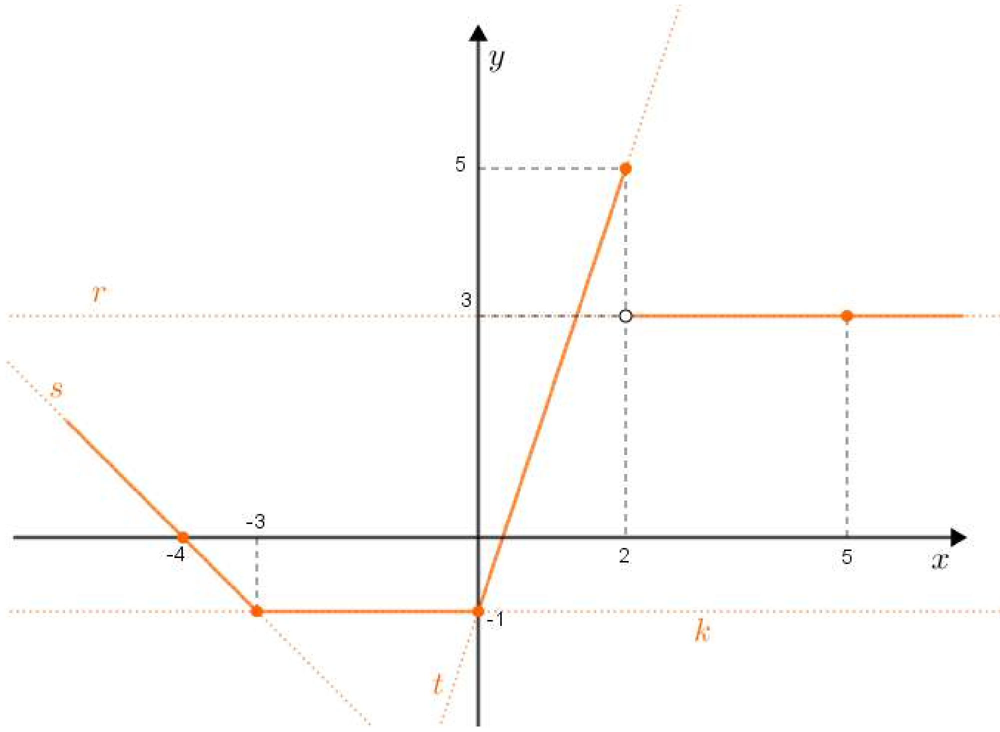
Determine $f(x)$, sabendo que f é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ cujo gráfico aparece esboçado abaixo.



Solução

A função f é o que chamamos de uma função definida por partes ou por várias sentenças. Particularmente, supondo que a tendência linear observada à esquerda e à direita do gráfico se mantenha nos intervalos $]-\infty,-3]$ e $]2,\infty[$, respectivamente, devemos calcular quatro expressões lineares para $f(x)$.

Observe inicialmente que as quatro expressões de $f(x)$ são as expressões que definem as retas k, r, s e t mostradas na figura a seguir.



Vamos aos cálculos.

- A reta k é paralela ao eixo Ox e corta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,-1)$. Como os pontos de k têm coordenadas da forma $(x,-1)$, com x um número real qualquer, então esta é a equação de k:

  $k: y=-1. \qquad (i)$

- A reta r também é paralela ao eixo Ox, mas corta o eixo Oy no ponto de coordenadas $(0,3)$. Assim, os seus pontos têm coordenadas da forma $(x,3)$, com x um número real qualquer e, então, esta é a sua equação:

  $r: y=3. \qquad (ii)$

- A reta s passa pelos pontos de coordenadas $(-4,0)$ e $(-3,-1)$; assim, as coordenadas desses dois pontos satisfazem a equação de s.
  Dessa forma, se a equação de s é da forma $y=ax+b$, com a e b números reais, temos que:

  $\boxed{0=-4a+b}$ e $\boxed{-1=-3a+b}$.

  Da primeira equação, obtemos que $b=4a$ e, substituindo essa expressão na segunda equação, segue que:

  $-1=-3a+4a$
  $a=-1,$

  donde concluímos que $b=4\times(-1)=-4$. Assim, a equação de s é

  $s: y=-x-4. \qquad (iii)$

- A reta t passa pelos pontos de coordenadas $(0,-1)$ e $(2,5)$; então, as coordenadas desses pontos satisfazem a equação de t.
  Assim, se essa equação for da forma $y=mx+n$, com m e n números reais, temos que:

  $\boxed{-1=0m+n}$ e $\boxed{5=2m+n}$.

  Da primeira equação, segue que $n=-1$ e, substituindo esse valor na segunda equação, tem-se que:

  $5=2m-1$
  $m=3,$

  Logo:

  $t: y=3x-1. \qquad (iv)$

Pronto, já podemos definir completamente a lei de formação da função f. Por (i), (ii), (iii) e (iv), concluímos que:

$$f(x)=\begin{cases} -x-4, \text{ se } x\in\,]-\infty,-3\,] \\ -1, \text{ se } x\in\,]-3,0\,] \\ 3x-1, \text{ se } x\in\,]\,0,2\,] \\ 3, \text{ se } x\in\,]\,2,+\infty] \end{cases} .$$

Note que o ponto $(-3,-1)$ é ponto tanto da reta s como da reta k; então, poderíamos também definir $f(x)$ assim :

$$f(x)=\begin{cases} -x-4, \text{ se } x\in\,]-\infty,-3\,[\\ -1, \text{ se } x\in\,[-3,0\,] \\ 3x-1, \text{ se } x\in\,]\,0,2\,] \\ 3, \text{ se } x\in\,]\,2,+\infty] \end{cases} .$$

Raciocinando de maneira análoga, com relação ao ponto $(0,-1)$ e às retas k e t, poderíamos também escrever:

$$f(x)=\begin{cases} -x-4, \text{ se } x\in\,]-\infty,-3\,] \\ -1, \text{ se } x\in\,]-3,0\,[\\ 3x-1, \text{ se } x\in\,[\,0,2\,] \\ 3, \text{ se } x\in\,]\,2,+\infty] \end{cases}$$

ou, ainda,

$$f(x) = \begin{cases} -x-4, \text{ se } x \in \,]-\infty, -3\,[\\ -1, \text{ se } x \in \,[-3, 0\,[\\ 3x-1, \text{ se } x \in \,[\,0, 2\,] \\ 3, \text{ se } x \in \,]\,2, +\infty] \end{cases} .$$

CUIDADO com o ponto $(2,5)$. Ele pertence apenas à reta t !

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.