.Problema para ajudar na escola: Cercando a horta

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Para evitar invasões de animais silvestres em suas plantações, um pequeno agricultor resolveu cercar o terreno retangular onde fica a sua horta, utilizando os $80\,m$ de tela que ele tem em casa.
Determinar as possíveis dimensões do terreno que será cercado, de modo que a área da horta não fique inferior a $364\,m^2$.

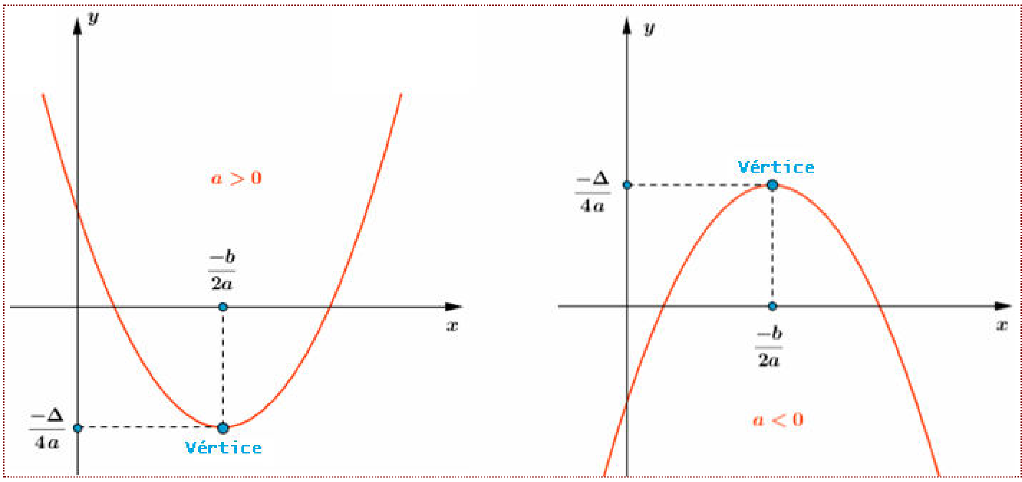
Lembretes

(1) O gráfico de uma função quadrática $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $h(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, é uma parábola com diretriz paralela ao eixo OX, sendo sua concavidade voltada para cima se $a>0$ e voltada para baixo se $a<0$.

(2) Se $\Delta=b^2-4ac$, as coordenadas do vértice da parábola são dadas por $(x_v,y_v)=\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, sendo que $x_v=\dfrac{-b}{2a}$ e $y_v=\dfrac{-\Delta}{4a}$ indicam, respectivamente:

✓ o ponto de mínimo e o valor mínimo da função h, se a concavidade estiver voltada para cima;
✓ o ponto de máximo e o valor máximo da função h, se a concavidade estiver voltada para baixo.

Visualizem abaixo as informações fornecidas no lembrete (2), se $\Delta>0$.



Solução

Vamos supor que x e y sejam os comprimentos dos lados do terreno que será cercado.

- Como o agricultor tem $80\,m$ de tela que poderão ser utilizados, então o perímetro desse terreno deve ser no máximo $80\,m$:

$$
\begin{aligned}
&2x + 2y \leqslant 80\\
&x + y \leqslant 40\\
&y \leqslant 40 - x. \qquad (i)
\end{aligned}
$$

- Como a área da horta não pode ser inferior a $364\,m^2$, então:

$$xy \geqslant 364. \qquad (ii)$$

Como x é um comprimento, então $x > 0$; logo, segue de (i) que

$$xy \leqslant 40x - x^2, \qquad (iii)$$

portanto, por (ii) e (iii), concluímos que:

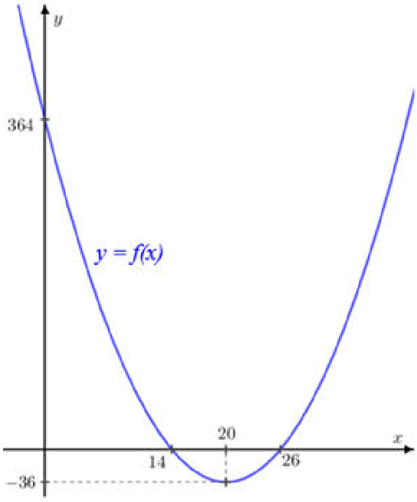
$$
\begin{aligned}
&364 \leqslant xy \leqslant 40x - x^2\\
&364 \leqslant 40x - x^2\\
&x^2 - 40x + 364 \leqslant 0. \qquad (iv)
\end{aligned}
$$

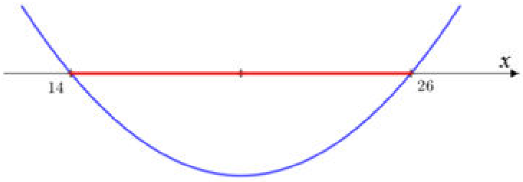
Observando o gráfico da função real definida pela expressão $f(x) = x^2 - 40x + 364$, a desigualdade (iv) nos mostra que os valores de x que satisfazem o problema são os números reais positivos para os quais a função f é negativa ou nula ($f(x) \leqslant 0$); por isso vamos analisar o sinal de f e, consequentemente, o sinal da expressão $\boxed{x^2 - 40x + 364}$.

Para traçar o gráfico de f e analisar a variação de sinal, vamos precisar das raízes da equação de segundo grau $x^2 - 40x + 364 = 0$. São elas:

$$
\begin{aligned}
&x = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 1 \cdot 364}}{2}\\
&x = \frac{40 \pm \sqrt{144}}{2}\\
&x = \frac{40 \pm 12}{2}\\
&x_1 = \frac{40 + 12}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{40 - 12}{2}\\
&x_1 = 26 \quad \text{e} \quad x_2 = 14.
\end{aligned}
$$

Na imagem a seguir, à esquerda, vemos parte do gráfico de f. À direita, vemos a ampliação do intervalo que contém os valores de x para os quais $f(x) \leqslant 0$.





Dessa forma, os valores de x que nos interessam estão no intervalo fechado $[14, 26]$.
E os valores de y?
Observe que:

- De $14 \leqslant x \leqslant 26$, segue que $14 \leqslant x$ e $x \leqslant 26$. Assim, temos as seguintes equivalências:
  $$14 \leqslant x \iff -x \leqslant -14 \iff 40 - x \leqslant 40 - 14 \iff 40 - x \leqslant 26.$$
  Assim, $y \leqslant 40 - x \leqslant 26$, donde:
  $$y \leqslant 26. \qquad (v)$$
  Como $y > 0$, de $x \leqslant 26$ segue que $xy \leqslant 26y$, Dessa forma, como $xy \geqslant 364$, temos que $364 \leqslant xy \leqslant 26y$, donde $364 \leqslant 26y$ e, portanto:
  $$14 \leqslant y. \qquad (vi)$$

De (v) e (vi), concluímos que $14 \leqslant y \leqslant 26$ e, com isso, os valores de y que nos interessam também estão no intervalo fechado $[14, 26]$.
É importante observar que, embora $14 \leqslant x, y \leqslant 26$, não podemos, por exemplo, tomar $x = 14$ e $y = 16$. Perceba que nesse caso temos $x + y = 14 + 16 = 30 \leqslant 40$, mas $xy = 14 \cdot 16 = 224$ e, portanto, a área da horta seria menor do que 364.
Também não podemos fazer $x = 26$ e $y = 22$, por exemplo. Perceba que nesse caso temos $xy = 26 \cdot 22 = 572 \geqslant 364$, mas $x + y = 26 + 22 = 48 \geqslant 40$ e o perímetro da horta seria maior do que os $80\,m$ de tela que o agricultor tem para cercá-la.
Concluindo, as possíveis dimensões x e y da horta são tais que:

$$\boxed{14 \leqslant x, y \leqslant 26, \text{ com } x + y \leqslant 40 \text{ e } xy \geqslant 26}.$$

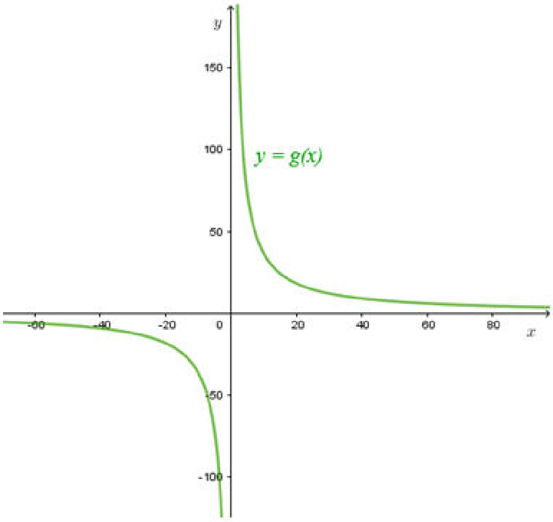
Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

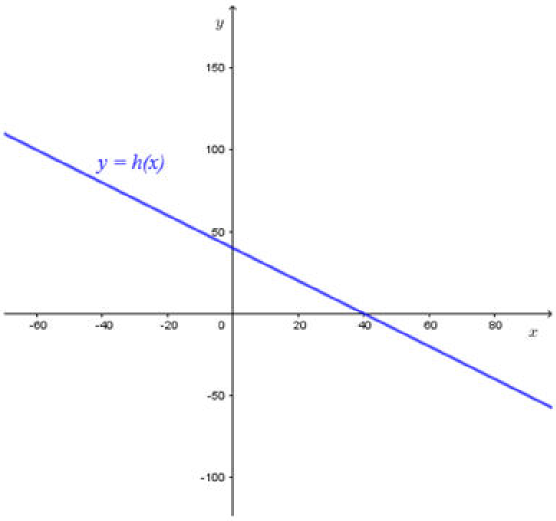
Solução geométrica

Se você conhece os gráficos das funções reais g e h assim definidas

$$g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \qquad\qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \frac{364}{x} \qquad\qquad h(x) = 40 - x$$

podemos visualizar as infinitas soluções deste problema. Veja um esboço dos gráficos!



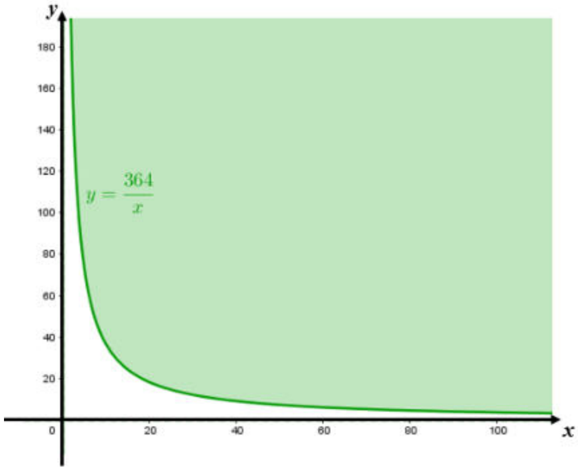


Para obter a solução graficamente, vamos observar as condições impostas no problema e para isso vamos considerar que x e y sejam os comprimentos dos lados do terreno que será cercado.
Então:

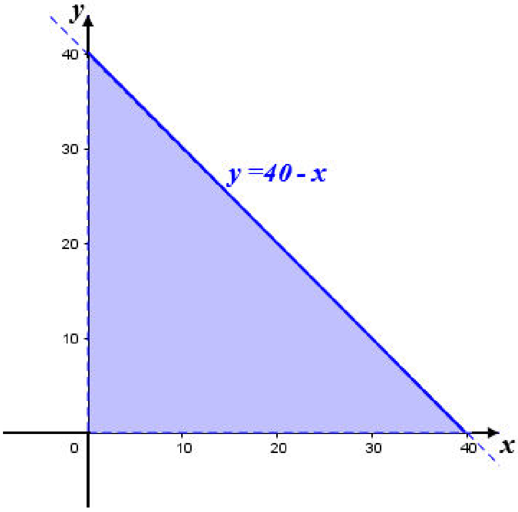
- Por serem comprimentos, $\boxed{x > 0}$ e $\boxed{y > 0}$.
- Como o agricultor dispõe de $80\,m$ de tela para fazer a cerca, então o perímetro do terreno deve ser no máximo $80\,m$ e assim $2x + 2y \leqslant 80$, ou seja, $\boxed{y \leqslant 40 - x}$.
- Como a área da horta é no mínimo $364\,m^2$, então $xy \geqslant 364$, ou seja, $\boxed{y \geqslant \dfrac{364}{x}}$.

Vamos inicialmente estudar isoladamente as duas condições principais que definem a solução do problema: $\boxed{xy \geqslant 364}$ e $\boxed{x + y \leqslant 40}$, lembrando sempre que $x > 0$ e $y > 0$.

- $y \geqslant \dfrac{364}{x}$, com $x > 0$ e $y > 0$



- $y \leqslant 40 - x$, com $x > 0$ e $y > 0$



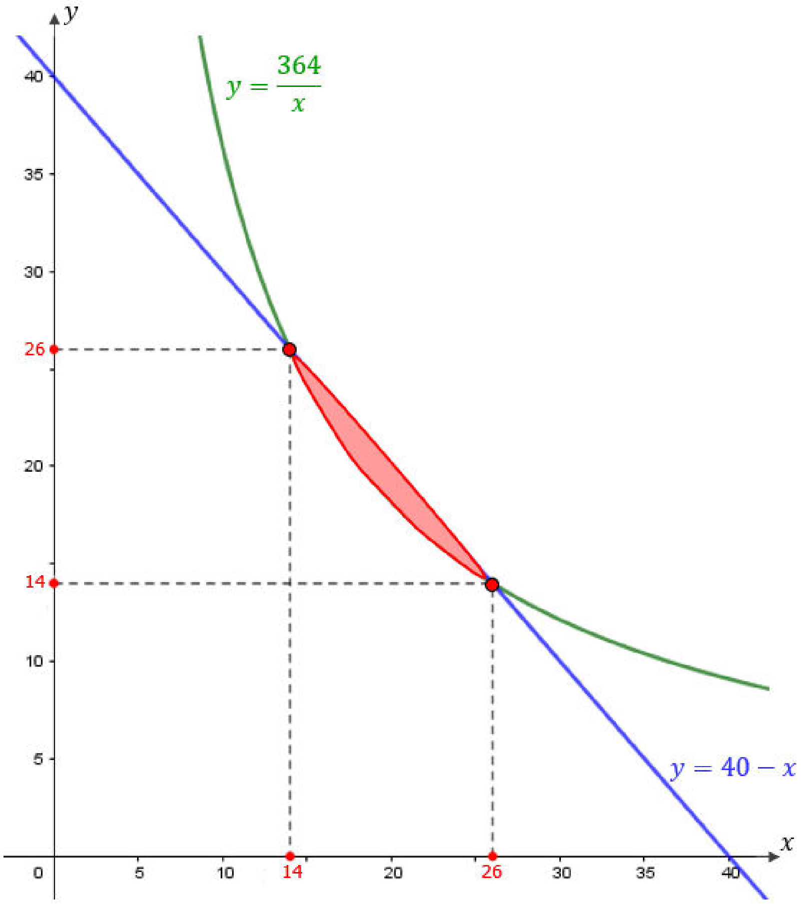
Fazendo a interseção das duas regiões mostradas acima, obtemos a solução gráfica do problema. Para ajudar na visualização da região de interseção, e consequente solução do problema, vamos determinar os pontos de interseção da curva $y = \dfrac{364}{x}$ e da reta $y = 40 - x$:

$$\frac{364}{x} = 40 - x$$
$$364 = 40x - x^2$$
$$x^2 - 40x + 364 = 0$$
$$x = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 1 \cdot 364}}{2}$$
$$x = \frac{40 \pm \sqrt{144}}{2}$$
$$x = \frac{40 \pm 12}{2}$$

$x_1 = \dfrac{40+12}{2}$ e $x_2 = \dfrac{40-12}{2}$

$\boxed{x_1 = 26}$ e $\boxed{x_2 = 14}$.

Eis a representação gráfica da solução do problema, destacada em vermelho:



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.