



.Problema para ajudar na escola: Catetos de um triângulo retângulo



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Em um dado triângulo retângulo, a hipotenusa mede 25 cm e a altura relativa a ela mede 12 cm . Qual é a medida de cada cateto desse triângulo?



Lembretes

Vamos resolver este problema utilizando apenas resultados bem conhecidos da Geometria:



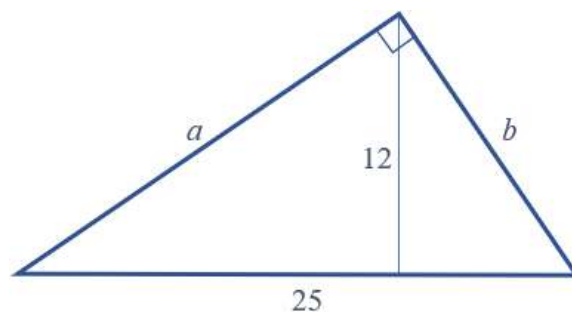
Teorema de Pitágoras: Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos.



Área do triângulo: $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

Solução

Vamos supor que os catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 25 cm e a altura relativa a ela mede 12 cm tenham comprimentos $a\text{ cm}$ e $b\text{ cm}$, conforme vemos na figura abaixo.



Pelo **segundo Lembrete**, a área de um triângulo é dada pela metade do produto entre uma base e sua respectiva altura. No caso do nosso triângulo, vamos calcular a sua área de dois modos:

- utilizando os dados do problema: $\frac{25 \times 12}{2}$,
- considerando como base e altura os dois catetos, já que o triângulo é retângulo: $\frac{a \times b}{2}$.

Dessa forma, se A_t é a área do nosso triângulo, então:

$$A_t = \frac{25 \times 12}{2} = \frac{a \times b}{2},$$

e assim temos que:

$$a \times b = 300. \quad (i)$$

Por outro lado, o primeiro Lembrete nos assegura que

$$a^2 + b^2 = 625. \quad (ii)$$

A partir das equações (i) e (ii), podemos resolver algebricamente o problema de duas maneiras; observe.

- Multiplicando a equação (i) por 2, temos que

- Podemos trabalhar diretamente com as equações (i)

$$2 \times a \times b = 600. \quad (iii)$$

Logo, somando (ii) e (iii), segue que:

$$(a^2 + b^2) + 2 \times a \times b = 625 + 600$$

$$a^2 + 2 \times a \times b + b^2 = 1225$$

$$(a + b)^2 = 1225$$

$$\sqrt{(a + b)^2} = \sqrt{1225} = 35.$$

Como a e b são números positivos, então

$$a + b = 35,$$

donde

$$b = 35 - a. \quad (iv),$$

Substituindo (iv) em (i), obtemos:

$$35a - a^2 = 300$$

$$a^2 - 35a + 300 = 0.$$

Resolvendo essa equação do segundo grau obtemos as raízes:

$$a = \frac{35 \pm \sqrt{1225 - 1200}}{2} = \frac{35 \pm 5}{2}$$

$$a_1 = \frac{35 + 5}{2} = 20 \quad e$$

$$a_2 = \frac{35 - 5}{2} = 15.$$

Substituindo essas raízes em (iv), obtemos os respectivos valores para o comprimento do segundo cateto:

$$b_1 = 35 - a_1 = 35 - 20 = 15 \quad e$$

$$b_2 = 35 - a_2 = 35 - 15 = 20.$$

Com isso, o triângulo retângulo em questão tem

catetos com comprimentos **15 cm e 20 cm**.

e (ii).

De (i), como $b \neq 0$, segue que

$$a = \frac{300}{b}. \quad (v)$$

Substituindo (v) em (i), obtemos a equação biquadrada

$$b^4 - 625b^2 + 90000 = 0. \quad (vi)$$

Se fizermos $x = b^2$ em (vi), obtemos a seguinte equação do segundo grau em x :

$$x^2 - 625x + 90000 = 0$$

Resolvendo essa equação obtemos as raízes:

$$x = \frac{625 \pm \sqrt{390625 - 360000}}{2} = \frac{625 \pm 175}{2}$$

$$x_1 = \frac{625 + 175}{2} = 400 \quad e$$

$$x_2 = \frac{625 - 175}{2} = 225.$$

Mas $x = b^2$, logo:

$$b_1^2 = 400 \quad e \quad b_2^2 = 225.$$

Como estamos lidando com medidas, $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$, e

$$b_1 = 20 \quad e \quad b_2 = 15.$$

Substituindo esses valores em (v), obtemos os respectivos valores para o comprimento do outro cateto:

$$a_1 = \frac{300}{b_1} = \frac{300}{20} = 15 \quad e$$

$$a_2 = \frac{300}{b_2} = \frac{300}{15} = 20.$$

Com isso, o triângulo retângulo em questão tem

catetos com comprimentos **15 cm e 20 cm**.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

