.Problema para ajudar na escola: Abacanja e laranxi

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Uma grande rede de lanchonetes oferece dois tipos de sucos que fazem o maior sucesso: o ***abacanja*** e o ***laranxi***.
Para produzi-los, são utilizadas duas frutas, abacaxi e laranja:

- Cada litro do abacanja é produzido a partir de 0,4 litros de suco puro de abacaxi e 0,6 litros de suco puro de laranja.
- Cada litro do laranxi é produzido a partir de 0,2 litros de suco puro de abacaxi e 0,8 litros de suco puro de laranja.

Por razões comerciais, a rede de lanchonetes quer produzir semanalmente pelo menos 200 litros do abacanja e pelo menos 300 litros do laranxi. No entanto, para preservar a qualidade, as lanchonetes da rede só podem armazenar frutas suficientes para produzir no máximo 200 litros de suco puro de abacaxi e 500 litros de suco puro de laranja por semana.
Sabendo que o lucro nas vendas é de R$ 4,00 por litro do abacanja e de R$ 5,00 por litro do laranxi, qual a quantidade em litros de cada tipo de suco que essa rede de lanchonetes deve vender semanalmente para maximizar seu lucro? Qual o lucro máximo que a rede poderá obter por semana?

Solução

Sejam x e y as quantidades em litros dos sucos de **abacanja** e **laranxi** que a rede de lanchonetes deve vender semanalmente para maximizar seu lucro, respectivamente. Assim, a partir dos dados do problema, vamos estabelecer as restrições para x e y. Mas antes, vamos construir uma tabela com os dados para facilitar.

Sucos	Litros a serem fabricados	Suco puro de abacaxi utilizado	Suco puro de laranja utilizado	Lucro
Abacanja	x	$0,4\cdot x\ litros$	$0,6\cdot x\ litros$	$4\cdot x\ reais$
Laranxi	y	$0,2\cdot y\ litros$	$0,8\cdot y\ litros$	$5\cdot y\ reais$
Totais	$x+y$	$(0,4\cdot x+0,2\cdot y)\ litros$	$(0,6\cdot x+0,8\cdot y)\ litros$	$(4\cdot x+5\cdot y)\ reais$

(1) Serão produzidos semanalmente pelo menos 200 litros do abacanja. Logo:

- $x\geqslant 200.$

(2) Serão produzidos semanalmente pelo menos 300 litros do laranxi. Logo:

- $y \geqslant 300.$

(3) Semanalmente, só podem ser armazenadas frutas suficientes para produzir no máximo 200 litros de suco puro de abacaxi. Assim:

- $0,4 \cdot x + 0,2 \cdot y \leqslant 200.$

(4) Semanalmente, só podem ser armazenadas frutas suficientes para produzir no máximo 500 litros de suco puro de laranja . Assim:

- $0,6 \cdot x + 0,8 \cdot y \leqslant 500.$

Por **(1)**, **(2)**, **(3)** e **(4)**, as restrições para x e para y são atendidas pelos pares ordenados (x, y) tais que:

$$\begin{cases} x \geqslant 200 \\ y \geqslant 300 \\ 0,4 \cdot x + 0,2 \cdot y \leqslant 200 \\ 0,6 \cdot x + 0,8 \cdot y \leqslant 500 \end{cases} . \qquad (i)$$

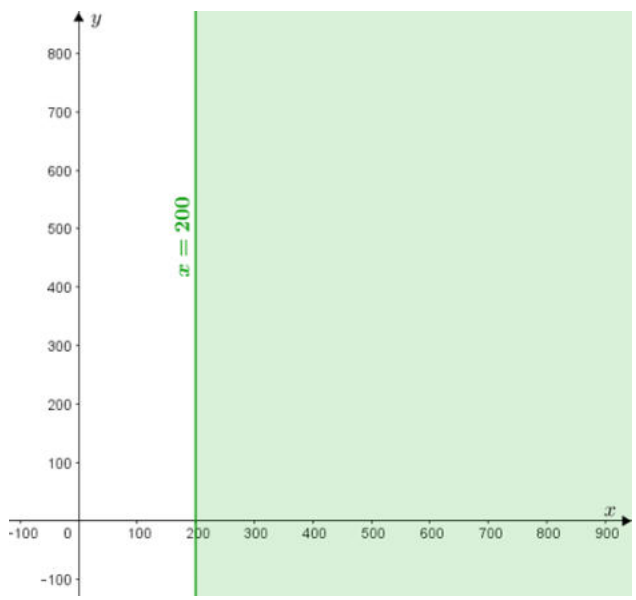
Observe que nada impede que as quantidades de litros sejam dadas por números não inteiros, já que podemos ter, por exemplo, 5 litros e meio, 10,7 litros. Então, vamos estudar cada uma dessas quatro condições isoladamente em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e, em seguida, analisarmos as quatro simultaneamente.

- **Condição** $\boxed{x \geqslant 200}$

  Os pontos $P = (x, y)$ que satisfazem esta condição são:

  – aqueles que estão sobre a reta r definida por $x = 200$,
  – aqueles que estão à direita da reta r ($x > 200$).

  A reta r é a reta vertical que intersecta o eixo Ox em $x = 200.$

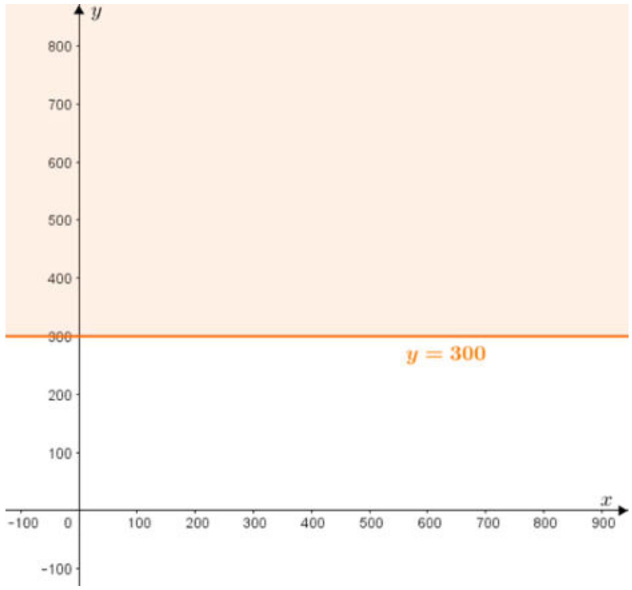


- **Condição** $\boxed{y \geqslant 300}$

  Os pontos $P = (x, y)$ que satisfazem esta condição são:

  – aqueles que estão sobre a reta s definida por $y = 300$,
  – aqueles que estão acima da reta s ($y > 300$).

  A reta s é a reta horizontal que intersecta o eixo Oy em $y = 300.$



- **Condição** $\boxed{0,4 \cdot x + 0,2 \cdot y \leqslant 200}$

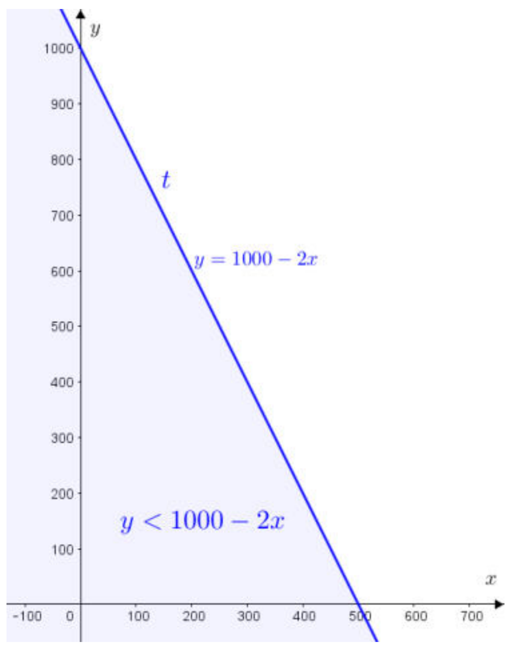
  Observe que

  $$0,4x + 0,2y \leqslant 200 \iff 2x + y \leqslant 1000 \iff y \leqslant 1000 - 2x \quad ,$$

  assim, os pontos $P = (x, y)$ que satisfazem esta terceira condição são:

  – aqueles que estão sobre a reta t definida por $y = 1000 - 2x$ (e satisfazem a igualdade $0,4 \cdot x + 0,2 \cdot y = 200$);
  – aqueles que estão abaixo da reta t (e satisfazem a desigualdade $0,4 \cdot x + 0,2 \cdot y < 200$).

  A reta t é a reta que intersecta os eixos Ox e Oy em $x = 500$ e $y = 1000$, respectivamente.



- **Condição** $\boxed{0,6 \cdot x + 0,8 \cdot y \leqslant 500}$

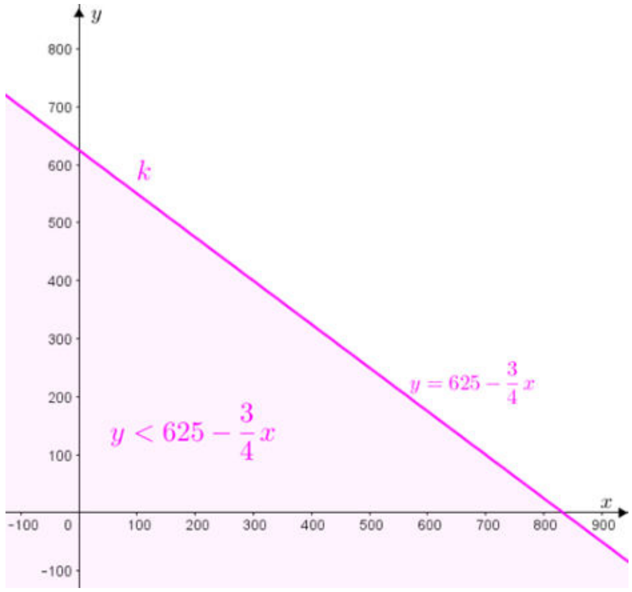
  Observe que:

  $$0,6x + 0,8y \leqslant 500 \iff \frac{3}{4}x + y \leqslant 625 \iff y \leqslant 625 - \frac{3}{4}x \quad ,$$

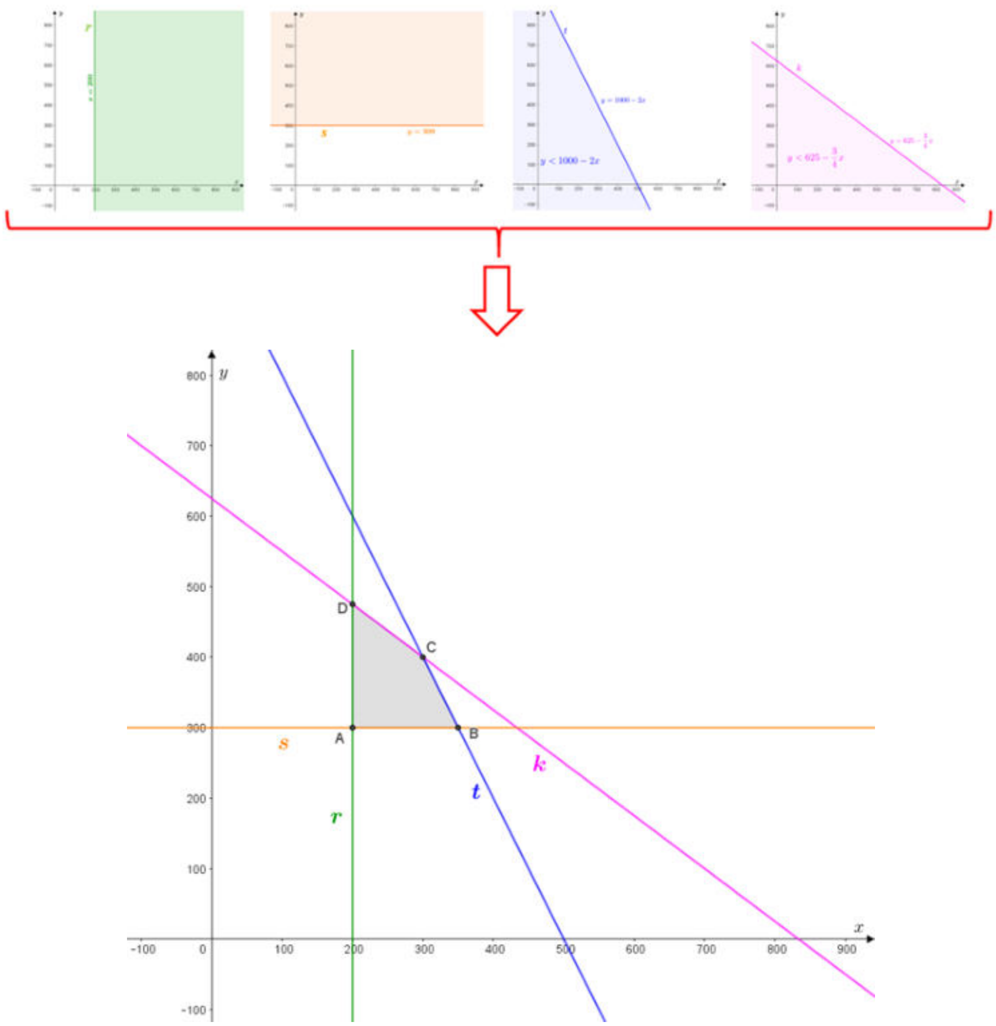
  assim, os pontos $P = (x, y)$ que satisfazem esta última condição são:

  – aqueles que estão sobre a reta k definida por $y = 625 - \dfrac{3}{4}x$ (e satisfazem a igualdade $0,6x + 0,8y = 500$),
  – aqueles que estão abaixo da reta k (e satisfazem a desigualdade $0,6 \cdot x + 0,8 \cdot y < 500$).

  A reta k é a reta que intersecta os eixos Ox e Oy em $x = \frac{2500}{3} \approx 833$ e $y = 625$, respectivamente.



Fazendo a interseção das quatro regiões acima, obtemos a solução do sistema (i) em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



Portanto, os pares ordenados que satisfazem as condições **(1)**, **(2)**, **(3)** e **(4)**, são aqueles que definem os pontos do quadrilátero $ABCD$ e de seu interior. Para melhor precisar essa região, vamos determinar as coordenadas dos vértices do quadrilátero $ABCD$.

- **O ponto** A é a interseção das retas r e s; assim, $A = (200, 300)$.
- **O ponto** B é a interseção das retas t e s; assim, $y_B = 300$ e, portanto,

$$y_B = 1000 - 2x_B$$
$$300 = 1000 - 2x_B$$

$2x_B = 700$

$x_B = 350.$

Logo, $B = (350, 300)$.

- **O ponto** C é a interseção das retas t e k; assim:

$$\begin{cases} y_C = 1000 - 2x_C \\ y_C = 625 - \frac{3}{4}x_C \end{cases}$$

$1000 - 2x_c = 625 - \frac{3}{4}x_C$

$4000 - 8x_c = 2500 - 3x_C$

$5x_C = 1500$

$x_C = 300$

$y_C = 1000 - 2 \times 300$

$y_C = 400.$

Logo, $C = (300, 400)$.

- **O ponto** D é a interseção das retas r e k; assim, $x_D = 200$ e, portanto,

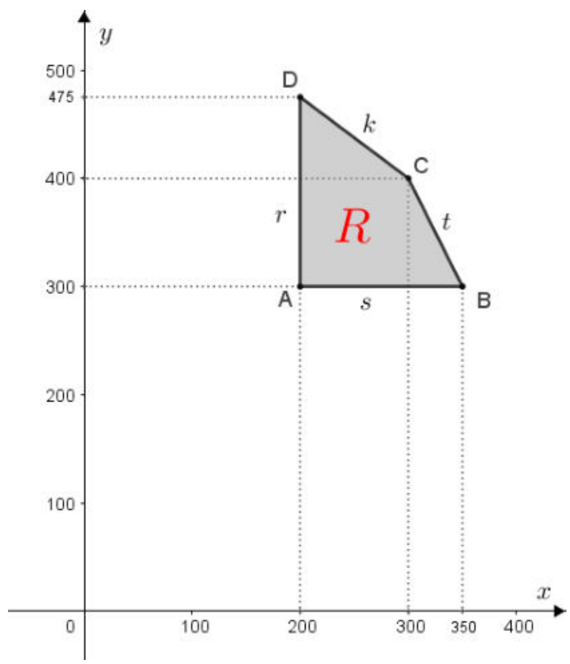
$y_D = 625 - \frac{3}{4}x_D$

$y_D = 625 - \frac{3}{4} \times 200$

$y_D = 625 - 150$

$y_D = 475.$

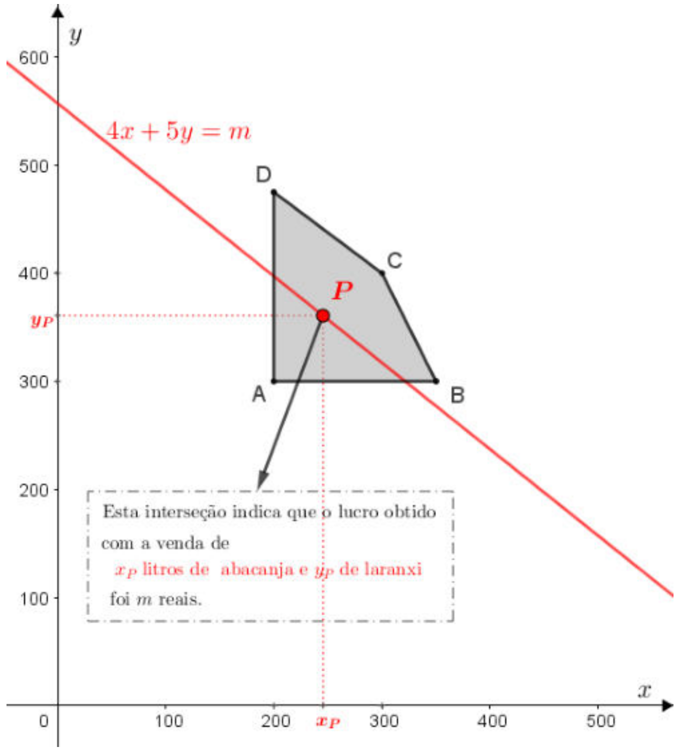
Logo, $D = (200, 475)$.



O lucro que a rede de lanchonetes obtém nas vendas é de R$ 4,00 por litro do abacanja e de R$ 5,00 por litro do laranxi, portanto o lucro L obtido semanalmente com a venda de x litros do abacanja e de y litros do laranxi é dado pela equação $\boxed{L = 4 \cdot x + 5 \cdot y}$.

Temos, então uma função L de duas variáveis, definida por $L(x, y) = 4 \cdot x + 5 \cdot y$, para a qual precisamos saber o valor máximo que ela assume dentre os pares ordenados (x, y) da região R definida pelo quadrilátero $ABCD$. São infinitos pares ordenados; logo, não podemos calcular $L(x, y)$ para cada um deles. Mas note que, para cada número real m, a equação $4 \cdot x + 5 \cdot y = m$ descreve uma reta. Assim, podemos analisar geometricamente a família de retas paralelas descritas por $4x + 5y = z$, para números reais positivos z, no plano cartesiano no qual esteja representada a região R.

A interseção de cada uma dessas retas com a região R determina os pontos cujas coordenadas definem as quantidades em litros dos dois sucos cujas vendas propiciam o lucro z que define a reta em questão.



Para facilitar a análise, podemos utilizar o applet abaixo.

> No aplicativo podemos visualizar um plano cartesiano xOy e a região R. Vemos também a reta definida pela equação $4 \cdot x + 5 \cdot y = 1$; esta é a primeira reta da família de retas $4 \cdot x + 5 \cdot y = z$, na qual a variável z representa o lucro obtido semanalmente com a venda de x litros do abacanja e de y litros do laranxi. As demais retas dessa família são obtidas movimentando-se horizontalmente o ponto que aparece na parte inferior esquerda do applet, sobre o segmento verde. Esse ponto indicará valores de 1 a 3500, valores estes que representarão lucros de $R\$\,1,00$ a $R\$\,3\,500,00$ com a venda dos dois sucos.
> Para cada reta obtida com a movimentação do ponto **Lucro**, a sua equação será exibida na parte superior do applet, a direita.

Clique AQUI para abrir o primeiro applet.

Com o applet observamos que, para os pontos que nos interessam, o lucro é maior do que $R\$\,2\,000,00$, assim, vamos apresentar outro applet no qual a primeira reta da família de retas $4 \cdot x + 5 \cdot y = z$ é a que tem como equação $4 \cdot x + 5 \cdot y = 2000$.

Clique AQUI para abrir o segundo applet.

Com esse último applet, fica mais evidente que o ponto que fornece o valor máximo da função $L(x, y)$ é o vértice C da região R. Para melhorar o entendimento sobre os valores do Lucro, vamos calcular o valor da função $L(x, y)$ em cada um dos vértices da região:

- $A = (200, 300)$

  Observe que $L(200, 300) = 4 \times 200 + 5 \times 300 = 2\,300$; assim, o lucro semanal obtido pela rede de lanchonetes com a venda de 200 litros de abacanja e 300 litros de laranxi será $R\$\,2\,300,00$.

- $B = (350, 300)$

  Observe que $L(350, 300) = 4 \times 350 + 5 \times 300 = 2\,900$; assim, o lucro semanal obtido pela rede de lanchonetes com a venda de 200 litros de abacanja e 300 litros de laranxi será $R\$\,2\,900,00$.

- $C = (300, 400)$

  Observe que $L(300, 400) = 4 \times 300 + 5 \times 400 = 3\,200$; assim, o lucro semanal obtido pela rede de lanchonetes com a venda de 200 litros de abacanja e 300 litros de laranxi será $R\$\,3\,200,00$.

- $D = (200, 475)$

  Observe que $L(200, 475) = 4 \times 200 + 5 \times 475 = 3\,175$; assim, o lucro semanal obtido pela rede de lanchonetes com a venda de 200 litros de abacanja e 300 litros de laranxi será $R\$\,3\,175,00$.

Portanto, a rede de lanchonetes deve vender semanalmente 300 **litros de abacanja e** 400 **litros de laranxi** para maximizar seu lucro com a venda desses dois sucos. Nesse caso, o lucro máximo que a rede poderá obter por semana será $\boxed{R\$\,3\,200,00}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.