

.Problema para ajudar na escola: A planilha do Artur



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Artur criou uma planilha eletrônica que, a partir de um conjunto de números naturais, elimina todos aqueles cuja soma dos respectivos algarismos é 12 e, em seguida, dos números que restam, elimina os múltiplos de 12.

	A	B	C
1	Números iniciais	Soma dos algarismos igual a 12	Múltiplos de 12
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Para testar a planilha que criou, Artur inseriu nela todos os números naturais de 1 a 200.

Quantos números restaram ao final desse teste?

Solução

Vamos analisar separadamente as duas condições presentes na planilha criada pelo Artur para os números naturais de 1 a 200.

(1) Números naturais n cuja soma dos algarismos é igual a 12

► Observe inicialmente que números com um algarismo não atendem esta condição.

► Vamos considerar agora os números naturais n com dois algarismos.

Assim, existem números naturais a e b , com $0 < a \leq 9$ e $0 \leq b \leq 9$, tais que $n = ab$. Como a soma dos algarismos de n é 12, então $a + b = 12$.

Como o valor máximo de a é 9, então o valor mínimo de b é 3. Da mesma forma, como o valor máximo de b é 9, então o valor mínimo de a é também 3. Com isso, temos $\boxed{7}$ possibilidades para n neste segundo caso.

► Vamos considerar neste caso os números naturais n com três algarismos.

Como estamos considerando números naturais até 200 e a soma dos algarismos de 200 não é 12, n é da forma $1ab$, com a, b números naturais tais que $0 \leq a, b \leq 9$.

Como a soma dos algarismos de n é 12, então $1 + a + b = 12$, ou seja, $a + b = 11$.

Como o valor máximo de a é 9, então o valor mínimo de b é 2. Da mesma forma, como o valor máximo de b é 9, então o valor mínimo de a é também 2. Com isso, temos $\boxed{8}$ possibilidades para n neste último caso.

Conforme o exposto, existem $7 + 8 = \boxed{15}$ números naturais de 1 a 200 cuja soma dos algarismos é 12.

(2) Números naturais múltiplos de 12

Ao dividirmos 200 por 12 obtemos como quociente 16,

$$\begin{array}{r} 200 \quad | \quad 12 \\ \underline{8 \quad 16} \end{array}$$

assim, os múltiplos de 12 de 1 a 200 são:

• $12 \times 1 = 12, 12 \times 2 = 24, 12 \times 3 = 36, \dots, 12 \times 16 = 192.$

Portanto, temos $\boxed{16}$ múltiplos naturais de 12 de 1 a 200.

(3) Ao somarmos os totais obtidos em (1) e em (2), $15 + 16 = 31$, poderíamos a princípio achar que finalizamos o problema fazendo a diferença $200 - 31 = 169$. Mas observe que podemos ter contado duas vezes alguns números: os múltiplos de 12 cuja soma dos algarismos é 12, não é?

Para eliminar do total 31 os números que satisfazem simultaneamente as condições (1) e (2), observamos que um número natural cuja soma dos algarismos é 12 é um múltiplo de 3. Assim, precisamos apenas nos preocupar em descobrir quais dentre os números com soma dos algarismos 12 são múltiplos de 4.

► Já sabemos que os números naturais $n = ab$ com dois algarismos tais que $a + b = 12$ têm necessariamente $3 \leq a \leq 9$, ou seja 39, 48, 57, 66, 75, 84, 93. Destes, apenas 48 e 84 são múltiplos de 12 e, portanto, foram contados duas vezes.

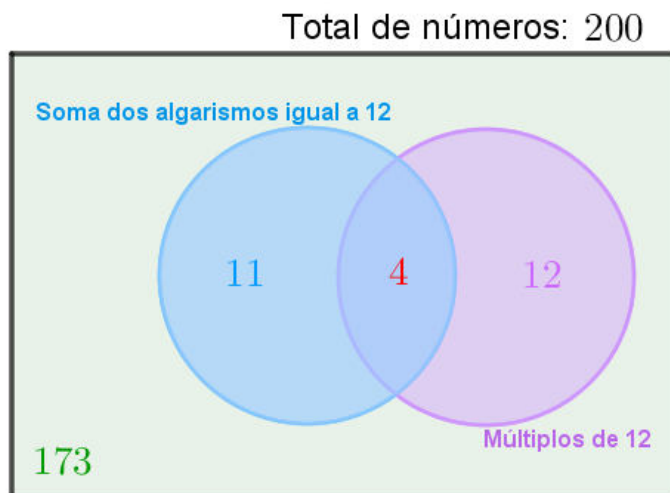
► Também sabemos que os números naturais com três algarismos que nos interessam são da forma $n = 1ab$ com $2 \leq a \leq 9$ e $a + b = 11$. Destes, apenas 156 e 192 são múltiplos de 12 e, portanto, foram contados duas vezes.

Assim, $2 + 2 = \boxed{4}$ números foram contados duas vezes.

Agora sim, já podemos finalizar nossa solução.

Observe que temos a seguinte situação:

- Múltiplos de 12 cuja soma dos algarismos é 12 : 4;
- Números com soma dos algarismos igual a 12, mas não múltiplos de 12 : $15 - 4 = 11$;
- Múltiplos de 12 cuja soma dos algarismos não é 12 : $16 - 4 = 12$.



Dessa forma, dos 200 números com os quais Arthur testou sua planilha, $4 + 11 + 12 = 27$ foram eliminados, restando então $200 - 27 = 173$ números.

Para quem gosta de ver para crer, disponibilizamos uma tabela com a análise dos 200 números testados pelo Artur utilizando os dois critérios da tabela que ele criou. Para vê-la, é só clicar **AQUI**.

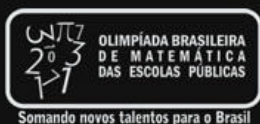
Disponibilizamos abaixo um arquivo contendo essa tabela. Na tabela do arquivo você poderá incluir duzentos números naturais quaisquer e testar os critérios definidos pelo Artur.

Observação: Para abrir o arquivo, você precisa ter o **Excel** instalado em seu computador.

[Arquivo](#)

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização



MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

