.Problema para ajudar na escola: Área de um trapézio

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Determinar a área de um trapézio $ABCD$, com bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, sabendo-se que $AB=52\,cm$, $BC=12\,cm$, $CD=39\,cm$, $DA=5\,cm$.

Notação: Denotaremos o segmento definido por dois pontos, digamos X e Y, por $\overline{XY}$ e o seu comprimento por XY.

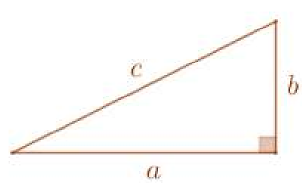
Ajuda

Um dos resultados mais conhecidos da Geometria é o "**Teorema de Pitágoras**":

> Se um triângulo retângulo tem catetos com comprimentos a e b e hipotenusa com comprimento c, então $\boxed{a^2+b^2=c^2}$.

Mas o que muitas pessoas não sabem é que **a recíproca desse teorema também é verdadeira**:

> Se os lados de um triângulo medem a , b e c e $\boxed{a^2+b^2=c^2}$, então esse é um triângulo retângulo cuja hipotenusa tem comprimento c .

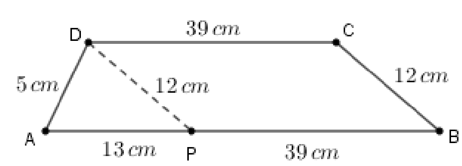


Solução

Pelo vértice D do trapézio, trace uma paralela ao lado $\overline{BC}$, obtendo o ponto P sobre $\overline{AB}$. Assim, $PBCD$ é um paralelogramo.

Como os lados paralelos de um paralelogramo têm as mesmas medidas, então:

- $PB=39\,cm$ e $DP=12\,cm$.

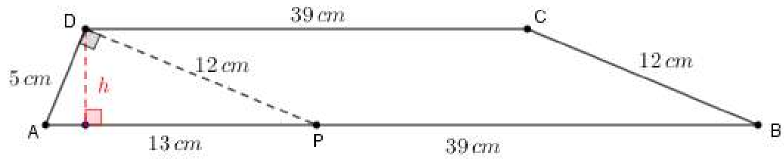


Observe, na figura de referência ao lado, que ficou definido um triângulo APD cujos lados medem

- $AP=52-39=13\,cm$, $PD=12\,cm$ e $AD=5\,cm$.

Por outro lado, temos que $5^2+12^2=169=13^2$; assim, de acordo com a **Ajuda**, APD é um triângulo retângulo e o ângulo $\angle ADP$ é reto, conforme mostra a nova figura de referência abaixo.

Como precisaremos da altura h do trapézio para calcularmos a sua área, vamos utilizar o triângulo APD para obtê-la.



Perceba que cada cateto de um triângulo retângulo pode ser tomado como a altura relativa ao outro cateto; assim, a área S de APD pode ser assim calculada:

$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{5 \times 12}{2} = 30\,.$$

Mas, h é a medida da altura de APD relativa à hipotenusa $\overline{AP}$; assim, a área S também é dada por $S = \dfrac{13 \times h}{2}$ e, como $S = 30$, então:

$$\begin{aligned} S &= \frac{13 \times h}{2} \\ 30 &= \frac{13 \times h}{2} \\ 60 &= 13 \times h \\ h &= \frac{60}{13}\,. \end{aligned}$$

Pronto, já podemos calcular a área do trapézio $ABCD$:

$$\begin{aligned} \text{Área}_{trapézio} &= \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \times \text{altura}}{2} \\ &= \frac{(52+39) \times \frac{60}{13}}{2} \\ &= \frac{(91) \times \frac{60}{13}}{2} \\ &= \frac{\cancel{91} \times 60}{2 \times \cancel{13}} \\ &= \frac{7 \times \cancel{60}}{\cancel{2}} \\ &= \boxed{210}\,. \end{aligned}$$

Portanto, a área do trapézio $ABCD$ é $\boxed{210\,cm^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Gincana de 2017 – Clubes de Matemática da OBMEP
Nível B – Questão Difícil