.Problema para ajudar na escola: Xi, complicou . . .

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(a) Encontrar dois números reais tais que a sua soma, o seu produto e a diferença entre seus quadrados são iguais entre si.

(b) Quantos pares de números reais obedecem à propriedade do item **(a)** ?

Solução

Sejam a e b dois números reais que satisfazem a propriedade descrita no enunciado do problema: **a sua soma, o seu produto e a diferença entre seus quadrados são iguais entre si**.

Assim:

$$\boxed{a+b=a\cdot b=a^2-b^2}. \qquad (i)$$

(a) Como o enunciado do problema não coloca restrições aos números a e b que devem satisfazer as igualdades (i), podemos fazer $a=0$ e $b=0$, já que:

$$\boxed{0+0=0\cdot 0=0^2-0^2}.$$

(b) Sejam a e b números reais quaisquer que satisfaçam as igualdades (i).

Assim, particularmente, $a+b=a^2-b^2$.

Mas, sabemos que $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, logo:

$$a+b=(a+b)(a-b). \qquad (ii)$$

Observe que, se $a+b\neq 0$, podemos dividir os dois lados da igualdade (ii) por $a+b$. Dessa forma, na nossa discussão, vamos considerar dois casos: $a+b\neq 0$ e $a+b=0$.

- **Caso 1:** $a+b\neq 0$

  Se $a+b\neq 0$, segue de (ii) que $a-b=1$, ou seja, que $a=b+1$.

  Assim, de (i), segue que:

  $$a+b=a\cdot b$$
  $$(b+1)+b=(b+1)b$$
  $$2b+1=b^2+b$$
  $$b^2-b-1=0. \qquad (iii)$$

  Resolvendo a equação do segundo grau (iii), temos que

  $$b=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2},$$

  ou seja, temos dois valores possíveis para b:

  $$b_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad b_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

  Como $a=b+1$, obtemos, respectivamente, dois valores para a:

  - $a_1=b_1+1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
  - $a_2=b_2+1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}+1=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Neste primeiro caso, temos dois pares de números reais que satisfazem as equações (i):

$$a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ e } b_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad a_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ e } b_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad .$$

- **Caso 2:** $a+b=0$

  Se $a+b=0$, então $a=-b$ e segue de (i) que $a \cdot b = 0$.
  Mas se a e b são números reais tais que $a \cdot b = 0$, então $a=0$ ou $b=0$; no entanto, como $a=-b$, necessariamente teremos $a=b=0$, que foi a solução que apresentamos no item **(a)**.

Finalmente, pela análise feita nos dois casos apresentados, temos que existem apenas três pares de números reais tais que $a+b=a \cdot b = a^2-b^2$.

São eles:

$$\boxed{a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad b_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \; ; \; \boxed{a_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad b_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{a_3 = 0 \quad \text{e} \quad b_3 = 0}$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.