



.Problema para ajudar na escola: Xi, complicou . . .



Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

- (a) Encontrar dois números reais tais que a sua soma, o seu produto e a diferença entre seus quadrados são iguais entre si.
- (b) Quantos pares de números reais obedecem à propriedade do item (a) ?

Solução

Sejam a e b dois números reais que satisfazem a propriedade descrita no enunciado do problema: **a sua soma, o seu produto e a diferença entre seus quadrados são iguais entre si.**

Assim:

$$a + b = a \cdot b = a^2 - b^2. \quad (i)$$

(a) Como o enunciado do problema não coloca restrições aos números a e b que devem satisfazer as igualdades (i), podemos fazer $a = 0$ e $b = 0$, já que:

$$0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0^2 - 0^2.$$

(b) Sejam a e b números reais quaisquer que satisfaçam as igualdades (i).

Assim, particularmente, $a + b = a^2 - b^2$.

Mas, sabemos que $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, logo:

$$a + b = (a + b)(a - b). \quad (ii)$$

Observe que, se $a + b \neq 0$, podemos dividir os dois lados da igualdade (ii) por $a + b$. Dessa forma, na nossa discussão, vamos considerar dois casos: $a + b \neq 0$ e $a + b = 0$.

- **Caso 1:** $a + b \neq 0$

Se $a + b \neq 0$, segue de (ii) que $a - b = 1$, ou seja, que $a = b + 1$.

Assim, de (i), segue que:

$$a + b = a \cdot b$$

$$(b + 1) + b = (b + 1)b$$

$$2b + 1 = b^2 + b$$

$$b^2 - b - 1 = 0. \quad (iii)$$

Resolvendo a equação do segundo grau (iii), temos que

$$b = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2},$$

ou seja, temos dois valores possíveis para b :

$$b_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } b_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Como $a = b + 1$, obtemos, respectivamente, dois valores para a :

- $a_1 = b_1 + 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

- $a_2 = b_2 + 1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

Neste primeiro caso, temos dois pares de números reais que satisfazem as equações (i):

$$a_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } b_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} ; a_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ e } b_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} .$$

• **Caso 2:** $a + b = 0$

Se $a + b = 0$, então $a = -b$ e segue de (i) que $a \cdot b = 0$.

Mas se a e b são números reais tais que $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$; no entanto, como $a = -b$, necessariamente teremos $a = b = 0$, que foi a solução que apresentamos no item (a).

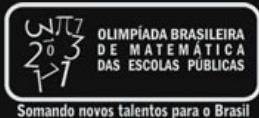
Finalmente, pela análise feita nos dois casos apresentados, temos que existem apenas três pares de números reais tais que $a + b = a \cdot b = a^2 - b^2$.

São eles:

$$\boxed{a_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } b_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} ; \boxed{a_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ e } b_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}} \text{ e } \boxed{a_3 = 0 \text{ e } b_3 = 0}$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

