

.Problema para ajudar na escola: Uma torre com cartas de baralho



Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

(OPM 2004 – adaptado) Um grupo de colegas resolveu construir torres utilizando cartas de baralho. Construíram inicialmente torres com um, dois, três e cinco andares, como as indicadas na figura.



Quantas cartas serão necessárias para que eles construam uma torre do mesmo tipo, só que com cem andares?



Lembrete



A soma dos n primeiros números naturais não nulos é dada por

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}.$$

(Para aprender um pouco mais sobre a soma $1 + 2 + 3 + \dots + n$, clique [AQUI](#))

Solução

Note que:

- Para o primeiro andar, serão necessárias apenas 2 cartas.
- Para o segundo andar, o grupo de colegas precisará de uma carta na horizontal, para apoiar as cartas do primeiro andar, e de $2 + 2$ cartas para a montagem do segundo andar propriamente dito.
- Para o terceiro andar, o grupo precisará de duas cartas na horizontal, para apoiar as cartas do segundo andar, e de $2 + 2 + 2$ cartas para a montagem do terceiro andar propriamente dito.
- Para o quarto andar, serão necessárias três cartas na horizontal, para apoiar as cartas do terceiro andar, e $2 + 2 + 2 + 2$ cartas para a montagem do quarto andar propriamente dito.
- Para o quinto andar, serão necessárias quatro cartas na horizontal, para apoiar as cartas do quarto andar, e $2 + 2 + 2 + 2 + 2$ cartas para a montagem do quinto andar propriamente dito.
- E assim por diante...

Com a tabela abaixo, podemos observar a quantidade de cartas a serem utilizadas, por andar, na construção da torre.

--	--

Andar	Número de cartas por andar
1º andar	$[0] + [1 \times 2]$
2º andar	$[1] + [2 \times 2]$
3º andar	$[2] + [3 \times 2]$
4º andar	$[3] + [4 \times 2]$
5º andar	$[4] + [5 \times 2]$
	...
nº andar	$[n - 1] + [n \times 2]$
	...
100º andar	$[99] + [100 \times 2]$

Para obter a quantidade Q de cartas necessárias para a construção da torre de cem andares, devemos somar a quantidade de cartas que serão utilizadas em cada andar.

Observe:

$$Q = ([0] + [1 \times 2]) + ([1] + [2 \times 2]) + ([2] + [3 \times 2]) + ([3] + [4 \times 2]) + ([4] + [5 \times 2]) + \dots + ([99] + [100 \times 2])$$

$$Q = (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99) + (1 \times 2 + 2 \times 2 + 3 \times 2 + 4 \times 2 + 5 \times 2 + \dots + 100 \times 2)$$

$$Q = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99) + 2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100)$$

$$Q = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99) + 2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99 + 100)$$

$$Q = (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99) + 2 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 99) + 2 \times 100$$

$$Q = 3 \times (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99) + 200.$$

Utilizando a fórmula do Lembrete, temos que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 = \frac{100 \times 99}{2} = 50 \times 99 = 4950,$$

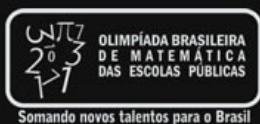
assim,

$$Q = 3 \times 4950 + 200 = 15050.$$

Portanto, serão necessárias 15 050 cartas para que o grupo de colegas consiga montar a torre com 100 andares.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

