.Problema para ajudar na escola: Uma sequência numérica disfarçada

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

A sequência de números

- $x_1\,,\,x_2\,,\,x_3,\,\cdots$

está assim definida:

$$x_1 = 2$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1},\ \text{para cada inteiro positivo } n.$$

Determinar x_{2017}.

Solução

Para tentar entender a lei de formação da sequência dada, vamos calcular alguns de seus termos iniciais:

- $x_1 = 2$
- $x_2 = \dfrac{x_1 - 1}{x_1 + 1} = \dfrac{2-1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$
- $x_3 = \dfrac{x_2 - 1}{x_2 + 1} = \dfrac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} + 1} = \dfrac{\frac{1-3}{3}}{\frac{1+3}{3}} = \dfrac{\frac{-2}{\cancel{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2}$
- $x_4 = \dfrac{x_3 - 1}{x_3 + 1} = \dfrac{-\frac{1}{2} - 1}{-\frac{1}{2} + 1} = \dfrac{\frac{-1-2}{2}}{\frac{-1+2}{2}} = \dfrac{\frac{-3}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = -3$
- $x_5 = \dfrac{x_4 - 1}{x_4 + 1} = \dfrac{-3-1}{-3+1} = \dfrac{-4}{-2} = 2.$

Como podemos observar que $x_5 = x_1$ e cada termo depende **APENAS** do seu termo imediatamente anterior, a nossa sequência é periódica, com período 4:

- $x_1 = 2\,,\ x_2 = \dfrac{1}{3}\,,\ x_3 = -\dfrac{1}{2},\ x_4 = -3,$

  $x_5 = 2\,,\ x_6 = \dfrac{1}{3}\,,\ x_7 = -\dfrac{1}{2},\ x_8 = -3,$

  $x_9 = 2\,,\ x_{10} = \dfrac{1}{3}\,,\ x_{11} = -\dfrac{1}{2},\ x_{12} = -3,\ \cdots$

Desta maneira, para determinarmos o valor do termo x_{2017}, basta dividirmos 2017 por 4 e observarmos o resto da divisão:

$$\begin{array}{r|l} 2017 & 4 \\ \cline{2-2} \boxed{1} & 504 \end{array}$$

Como 2017 é um múltiplo de 4 mais 1, a nossa sequência segue:

- $x_1 = 2\,,\ x_2 = \dfrac{1}{3}\,,\ x_3 = -\dfrac{1}{2},\ x_4 = -3,$

  $x_5 = 2\,,\ x_6 = \dfrac{1}{3}\,,\ x_7 = -\dfrac{1}{2},\ x_8 = -3,$

$x_9 = 2$, $x_{10} = \dfrac{1}{3}$, $x_{11} = -\dfrac{1}{2}$, $x_{12} = -3$,

$$\vdots$$

$\boxed{x_{2017} = 2}$, $\cdots$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.