.Problema para ajudar na escola: Uma circunferência e um triângulo

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Qual a medida do raio da circunferência inscrita em um triângulo retângulo isósceles cujos lados congruentes medem $6\,cm$ cada?

Lembretes

Informações importantes sobre triângulos e circunferências:

O centro da circunferência inscrita em um triângulo é o **incentro**, que é o encontro das três bissetrizes internas desse triângulo.(Bissetriz de um triângulo é um segmento com extremidades em um vértice e no respectivo lado oposto e que divide o ângulo interno definido por esse vértice em dois ângulos com a mesma medida.)

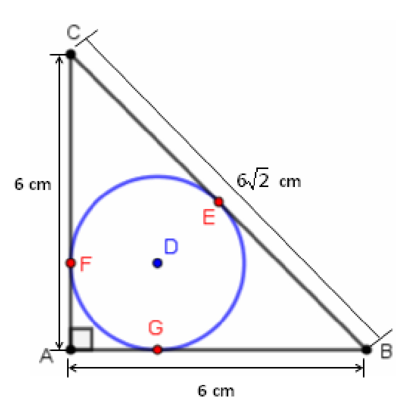
A bissetriz relativa à base de um triângulo isósceles também é uma mediana e uma altura.

Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

Notação

Denotaremos o segmento definido por dois pontos genéricos, digamos X e Y, por $\overline{XY}$ e o seu comprimento por XY.

Solução 1



A figura ao lado mostra os dados do nosso problema, a partir de um triângulo retângulo isósceles ABC. Como a hipotenusa de um triângulo retângulo é o maior dos seus três lados, se esse triângulo retângulo é isósceles, isso significa que os lados congruentes são os seus catetos. Assim, o terceiro lado do triângulo ABC é sua hipotenusa e, no nosso caso, se o comprimento dessa hipotenusa for h, então, pelo Teorema de Pitágoras:

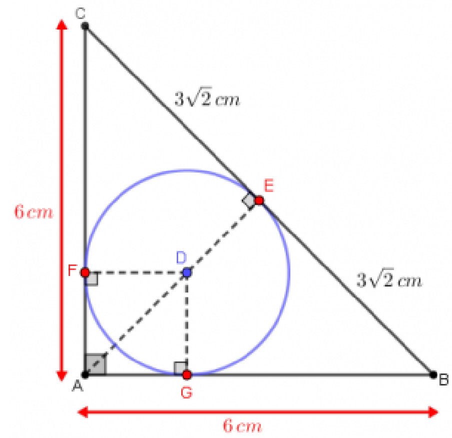
$$h^2 = 6^2 + 6^2$$
$$h = \sqrt{2 \cdot 6^2}$$
$$h = 6\sqrt{2}\,cm.$$

Uma circunferência inscrita em um triângulo tangencia esse triângulo em três pontos. No nosso caso, esses pontos foram denotados por E , F e G. O ponto D mostrado na figura é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC.

Mas o que sabemos sobre a circunferência inscrita no triângulo ABC ?

- Utilizando simultaneamente os três lembretes, concluímos que o segmento $\overline{AE}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$, contém o centro D e E é o ponto médio de $\overline{BC}$. Assim as medidas dos segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{EC}$ são iguais a $3\sqrt{2}\,cm$.

- Pelo terceiro lembrete:
  - os segmentos $\overline{DF}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares.
  - os segmentos $\overline{DG}$ e $\overline{AB}$ são perpendiculares.

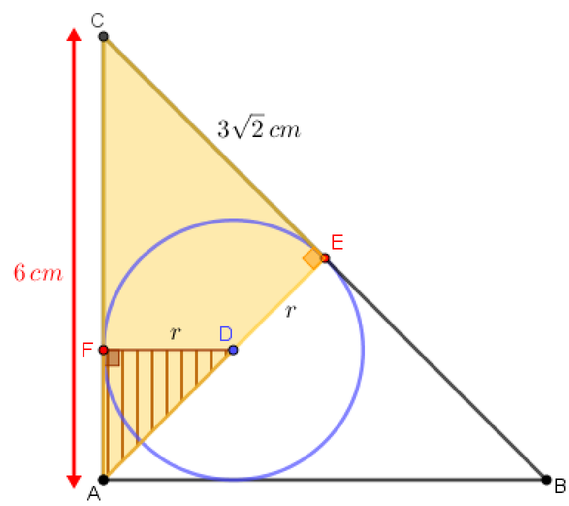


Registramos essas conclusões na segunda figura lateral.

Aproveitando essa segunda figura, observamos que o Teorema de Pitágoras nos fornece a medida x do segmento $\overline{AE}$:

$$x^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 6^2$$
$$x^2 + 18 = 36$$
$$x = \sqrt{18}$$
$$x = \sqrt{2 \cdot 9}$$
$$x = 3\sqrt{2}\,cm.$$

Estamos aptos a resolver o problema; para isso, observemos a última figura.



Perceba que os triângulos FAD e EAC são semelhantes, pois ambos têm um ângulo reto e o ângulo de vértice A é comum aos dois.

Dessa forma

$$\frac{AD}{AC} = \frac{FD}{CE},$$

donde:

$$\frac{3\sqrt{2} - r}{6} = \frac{r}{3\sqrt{2}}.$$

Assim, segue que:

$$3\sqrt{2} \cdot \left(3\sqrt{2} - r\right) = 6r$$
$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 - 3\sqrt{2}\,r = 6r$$
$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 = r\left(6 + 3\sqrt{2}\right)$$
$$18 = r\left(6 + 3\sqrt{2}\right)$$

donde,

$$r = \frac{18}{6 + 3\sqrt{2}} = \frac{18}{6 + 3\sqrt{2}} \cdot \frac{6 - 3\sqrt{2}}{6 - 3\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{18 \cdot \left(6 - 3\sqrt{2}\right)}{6^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2} = \frac{18 \cdot \left(6 - 3\sqrt{2}\right)}{36 - 18}$$

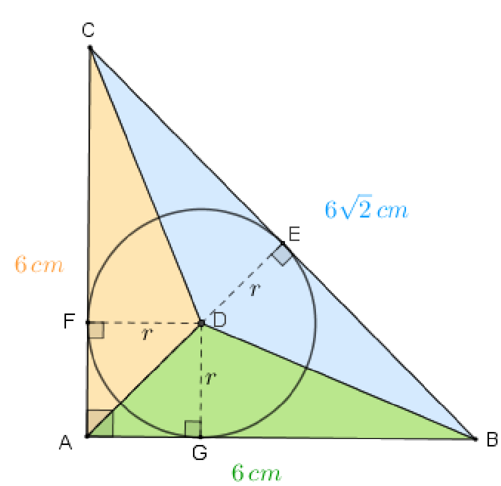
$$r = \frac{\cancel{18} \cdot \left(6 - 3\sqrt{2}\right)}{\cancel{18}} = 6 - 3\sqrt{2}.$$

Pelo exposto, a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo ABC é $\boxed{6 - 3\sqrt{2}\,cm}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

A partir da informação obtida na primeira solução de que a hipotenusa do triângulo retângulo ABC mede $6\sqrt{2}\,cm$, podemos utilizar o terceiro lembrete e obter a figura ao lado.



Para solucionar o problema, basta observar que a área do triângulo ABC é a soma das áreas dos triângulos ADB, BDC e CDA. Vamos, então, calcular essas áreas.

- Área do triângulo ABC:

$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{AB \times CA}{2}$$
$$S = \frac{6 \times 6}{2} = \frac{36}{2} = 18\,cm^2$$

- Área do triângulo ADB:

$$S_1 = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{AB \times DG}{2}$$

$$S_1 = \frac{6 \times r}{2} = 3r\,cm^2$$

- Área do triângulo BDC:

$$S_2 = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{BC \times DE}{2}$$

$$S_2 = \frac{6\sqrt{2} \times r}{2} = 3\sqrt{2}r\,cm^2$$

- Área do triângulo CDA:

$$S_3 = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{CA \times DF}{2}$$

$$S_3 = \frac{6 \times r}{2} = 3r\,cm^2$$

Como $S = S_1 + S_2 + S_3$, segue que:

$$18 = 3r + 3\sqrt{2}r + 3r = 6r + 3\sqrt{2}r = \left(6 + 3\sqrt{2}\right) r$$

e, assim,

$$r = \frac{18}{6+3\sqrt{2}} = \frac{18}{6+3\sqrt{2}} \cdot \frac{6-3\sqrt{2}}{6-3\sqrt{2}} = \frac{18 \cdot \left(6-3\sqrt{2}\right)}{6^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2}$$

$$r = \frac{18 \cdot \left(6-3\sqrt{2}\right)}{36-18} = \frac{\cancel{18} \cdot \left(6-3\sqrt{2}\right)}{\cancel{18}} = 6 - 3\sqrt{2}.$$

Mais uma vez, obtivemos que a medida do raio da circunferência inscrita no triângulo ABC é $\boxed{6-3\sqrt{2}\,cm}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

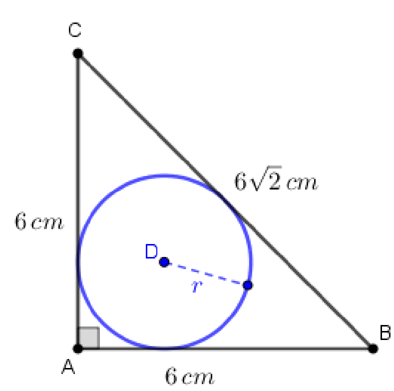
Se você repetir o raciocínio que fizemos na Solução 2 para um triângulo qualquer, você vai obter uma fórmula muito útil para o cálculo da área de um triângulo:

$$\boxed{S = p \cdot r}$$

sendo S a área do triângulo; p o seu semiperímetro e r o raio da circunferência nele inscrita.

Solução 3

A partir da informação de que a hipotenusa do triângulo retângulo ABC mede $6\sqrt{2}\,cm$, vamos utilizar a fórmula $\boxed{S = p \cdot r}$ para solucionar rapidamente o problema. Observe:



$$S = p \cdot r$$

$$18 = \frac{6+6+6\sqrt{2}}{2} \cdot r = \frac{12+6\sqrt{2}}{2} \cdot r = \frac{6 \cdot (2+\sqrt{2})}{2} \cdot r$$

$$18 = \frac{\cancel{6} \cdot (2+\sqrt{2})}{\cancel{2}} \cdot r = 3 \cdot (2+\sqrt{2}) \cdot r$$

$$\cancel{18} = \cancel{3} \cdot (2+\sqrt{2}) \cdot r$$

$$6 = 2 + \sqrt{2} \cdot r$$

$$r = \frac{6}{2+\sqrt{2}} = \frac{6}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot (2-\sqrt{2})}{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{6 \cdot (2-\sqrt{2})}{4-2}$$

$$r = \frac{6 \cdot (2-\sqrt{2})}{2} = \frac{\cancel{6} \cdot (2-\sqrt{2})}{\cancel{2}} = 3 \cdot (2-\sqrt{2})$$

$$\boxed{r = 6 - 3\sqrt{2}}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.