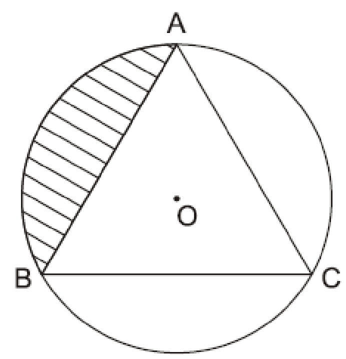
.Problema para ajudar na escola: Um triângulo inscrito em um círculo

Problema

(**PUCRJ-2014**-adaptado) Considere o triângulo equilátero ABC inscrito no círculo de raio 1 e centro O, como apresentado na figura abaixo.

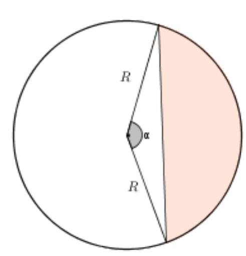


(a) Calcule a medida do ângulo $A\hat{O}B$ em graus e em radianos.

(b) Calcule a área da região hachurada.

Lembretes

(1) Área de um segmento circular de raio R e α radianos:



$$\boxed{A_{segm} = \frac{R^2}{2}(\alpha - sen\,\alpha)}$$

(Para aprender um pouco mais sobre **segmento circular**, clique **AQUI**.)

---

(2) Área de um triangulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio R:

$$\boxed{A_{teq} = \frac{3 \cdot R^2 \cdot \sqrt{3}}{4}}$$

(Se você não conhece essa fórmula, clique **AQUI**.)

---

(3) A um arco de circunferência podemos associar duas medidas distintas:

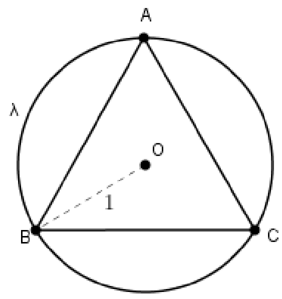
– a sua medida angular;
– a sua medida linear.

Ambas podem ser obtidas a partir do "comprimento e da medida angular da circunferência que define o arco".

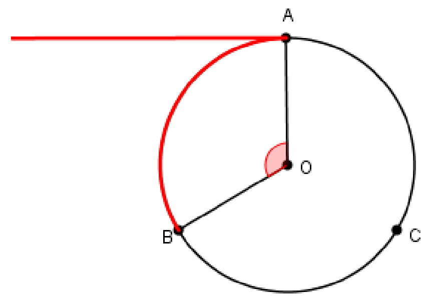
(Se você não se lembra dessas medidas, clique **AQUI**.)

Solução

Seja λ a circunferência de centro em O e raio 1 na qual o triângulo ABC está inscrito.



(a) O ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo central relativo à circunferência λ, assim ele determina um arco sobre λ: $\overset{\frown}{AB}$.

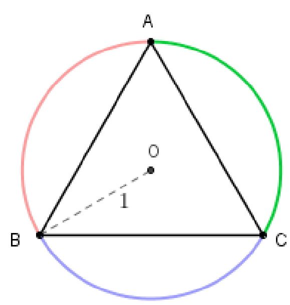


Pelo **Lembrete (3)**, ao arco $\overset{\frown}{AB}$ podemos associar duas medidas: a sua medida angular e a sua medida linear. Dessa forma, podemos associar ao ângulo $A\hat{O}B$ duas medidas:

- a medida em graus de $A\hat{O}B$ é exatamente a medida angular do arco que ele determina sobre λ;
- a medida em radianos de $A\hat{O}B$ é o valor numérico da medida linear (o comprimento) do arco que ele determina sobre λ, já que o raio de λ é 1.

Vamos, então, calcular a medida angular e o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ para determinarmos a medida em graus e em radianos do ângulo $A\hat{O}B$. Para isso, o nosso ponto de partida será a seguinte observação:

- Como o triângulo ABC é equilátero, os vértices A, B e C dividem a circunferência λ em três arcos congruentes. Assim, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CA}$ são arcos com o mesmo comprimento: $\dfrac{1}{3}$ do comprimento de λ.



(i) Uma circunferência tem medida angular 360°, consequentemente, a medida angular de $\overset{\frown}{AB}$ é $\dfrac{360^\circ}{3}$, ou seja, 120°.

Pelo exposto, concluímos que a medida, em graus, do ângulo $A\hat{O}B$ será também $\boxed{120^\circ}$.

(ii) Como o comprimento de uma circunferência de raio 1 é 2π e os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CA}$ são congruentes, então o comprimento de $\overset{\frown}{AB}$ é $\dfrac{2\pi}{3}$.

Poderíamos também ter obtido o comprimento c do arco $\overset{\frown}{AB}$, a partir de sua medida em graus, utilizando a regra de três abaixo indicada:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & -------------- & 360^\circ \\ c & -------------- & 120^\circ \end{array}$$

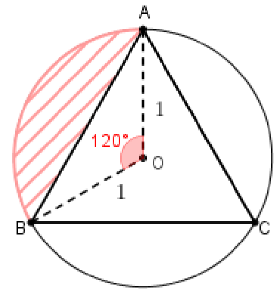
De qualquer modo, $A\hat{O}B$ mede $\boxed{\dfrac{2\pi}{3}\ radianos}$.

(b) Seja A a área que devemos calcular neste item. Vamos calculá-la de duas maneiras.

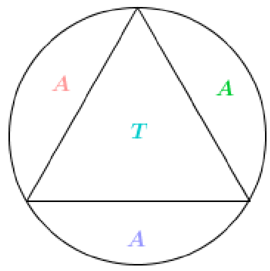
(i) Observe que A pode ser considerada a área de um segmento circular de raio 1 e $\dfrac{2\pi}{3}$ radianos.

Assim, pelo **Lembrete (1)** segue que:

$$A = \frac{1^{\,2}}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - sen\,\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



$\boxed{A = \dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}}$ unidades de área.



(ii) Como $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{CA}$ são arcos com o mesmo comprimento, A corresponde a $\dfrac{1}{3}$ da área do círculo menos a área da região definida pelo triângulo ABC.

Como a área do círculo é $\pi(1)^2 = \pi$, se T for a área triangular ABC, então $\boxed{A = \dfrac{1}{3}(\pi - T)}$. Portanto, basta calcularmos T.

Pelo **Lembrete (2)**, segue que:

$$T = \frac{3 \cdot 1^{\,2} \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$T = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

assim,

$$A = \frac{1}{3}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{4}\right)$$

ou seja, $\boxed{A = \dfrac{4\pi - 3\sqrt{3}}{12}}$ unidades de área.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.