.Problema para ajudar na escola: Um retângulo ABCD e um quadrilátero MPQD

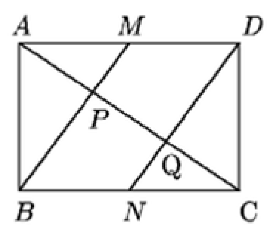
Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

No retângulo $ABCD$ da figura,

- M e N são os pontos médios dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, respectivamente,
- P e Q são as respectivas interseções de $\overline{AC}$ com $\overline{BM}$ e com $\overline{ND}$.

Sabendo que a medida de $\overline{AD}$ é $5\,cm$ e a de $\overline{AB}$ é $3\,cm$, **qual a área do quadrilátero** $MPQD$?



Solução

(a) De maneira rápida poderíamos resolver o problema observando que os triângulos ABM e DNC são congruentes e cada um tem área igual a $\dfrac{2,5\times 3}{2}\,cm^2$.

Por outro lado, os segmentos $\overline{BM}$ e $\overline{ND}$ são paralelos e a área do quadrilátero $MPQD$ é a metade da área que sobra do retângulo maior $ABCD$, quando eliminamos as áreas dos triângulos ABM e DNC, que juntas valem $2,5\times 3\,cm^2$.

Assim, a área solicitada no problema é $\boxed{\dfrac{5\times 3-(2,5\times 3)}{2}=3,75\,cm^2}$.

(b) Alguns de vocês que leram a solução acima devem ter ficado com muitíssimas dúvidas, não é?

Então, vamos fazer uma solução mais detalhada, tentar ajudar no entendimento da solução "taquigrafada".

- Como os triângulos ABM e CDN são congruentes (são triângulos retângulos com catetos correspondentes congruentes), seus ângulos correspondentes têm as mesmas medidas, conforme indicamos na *Figura 1*.

  Observe, também, que esses dois triângulos têm a mesma área, logo temos as áreas indicadas na *Figura 2* assim relacionadas: $A_1+A_2=A_3+A_4$. $\quad (i)$

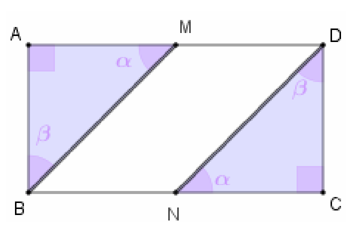


Figura 1

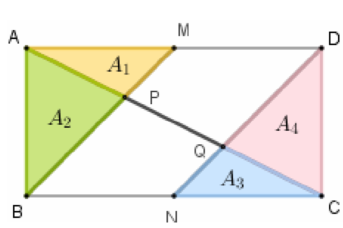


Figura 2

- Observe com auxílio da *Figura 3* que os ângulos $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}D$ são alternos internos, logo são congruentes (Se você não sabe o que são ângulos alternos internos, clique **AQUI**). Por outro lado, sabemos que os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{NC}$ têm a mesma medida.

  Dessa forma, os triângulos APM e CQN, mostrados na *Figura 4*, são congruentes (caso ALA) e, portanto, as áreas A_1 e A_3 são iguais.

  Segue, então, de (i), que $A_2 = A_4$. $\quad (ii)$

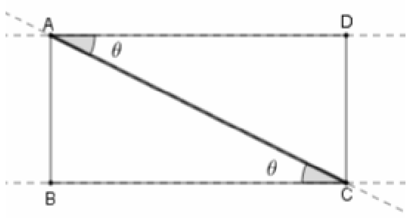


Figura 3

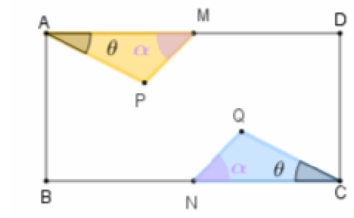


Figura 4

- Observe, finalmente, que os triângulos retângulos ABC e CDA são também congruentes (caso LLL) e, portanto têm a mesma área. Dessa forma, $A_1 + A_6 + A_4 = A_2 + A_5 + A_3$.

  Mas $A_2 = A_4$ e $A_1 = A_3$, logo $A_6 = A_5$.

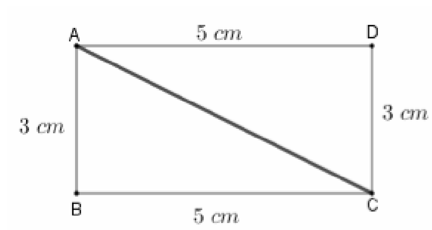


Figura 5

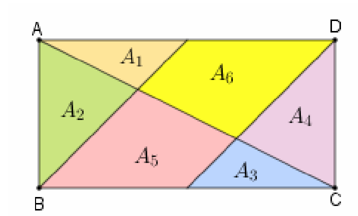
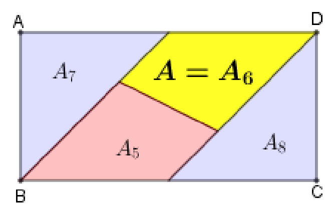


Figura 6

A área do retângulo $ABCD$ pode ser decomposta como soma das áreas A_5, A_6, A_7, A_8, conforme mostra a figura ao lado, sendo $A = A_6$ a área solicitada no problema.



Mas sabemos que:

- a área do retângulo $ABCD$ é $3 \times 5 = 15\,cm^2$;
- as áreas A_7 e A_8 são iguais a $\dfrac{2,5 \times 3}{2}$;

logo

$$
\begin{aligned}
&15 = A_5 + A_6 + A_7 + A_8\\
&15 = A_5 + A + \frac{2,5 \times 3}{2} + \frac{2,5 \times 3}{2}\\
&15 = A + A + 2,5 \times 3\\
&2A = 15 - 2,5 \times 3\\
&2A = 15 - 7,5\\
&A = \frac{7,5}{2}\\
&A = 3,75
\end{aligned}
$$

e, assim, a área solicitada no problema é $\boxed{3,75\,cm^2}$.

Soluções elaboradas pelos **Moderadores do Blog**.