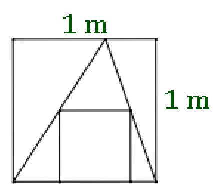
.Problema para ajudar na escola: Um quadrado inscrito em um triângulo inscrito

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Aninha inscreveu um quadrado em um triângulo que, por sua vez, está inscrito em um outro quadrado com 1 metro de lado.

Qual é a área, em metros quadrados, do quadrado menor?



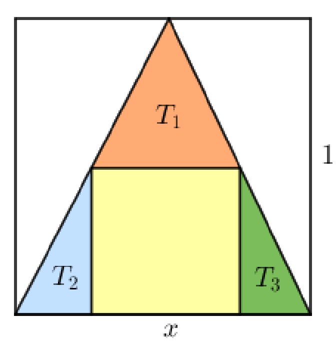
Solução

Observe, inicialmente, que a área do triângulo inscrito no quadrado maior é $\dfrac{1}{2}$.

Observe, também, que a área desse triângulo é a soma das áreas do quadrado menor e de três triângulos menores, conforme vemos na figura abaixo.

Assim, se:

- x é comprimento dos lados do quadrado menor;
- A_q é a área do quadrado menor;
- A_1 é a área do triângulo T_1;
- A_2 é a área do triângulo T_2;
- A_3 é a área do triângulo T_3;



então podemos afirmar que:

$$\frac{1}{2}=A_q+A_1+A_2+A_3$$

$$\frac{1}{2}=x^2+\frac{x(1-x)}{2}+A_2+A_3. \qquad (i)$$

Não sabemos quais são os comprimentos das bases dos triângulos T_2 e T_3, mas observamos que a soma desses comprimentos é $1-x$ e a altura relativa a essa base de cada um é x. Com isso, temos que $A_2+A_3=\dfrac{x(1-x)}{2}$ e, portanto, segue por (i) que:

$$\frac{1}{2}=x^2+\frac{x(1-x)}{2}+(A_2+A_3)$$

$$\frac{1}{2}=x^2+\frac{x(1-x)}{2}+\frac{x(1-x)}{2}$$

$$\frac{1}{2}=x^2+2\,\frac{x(1-x)}{2}$$

$$\frac{1}{2}=x^2+\cancel{2}\,\frac{x(1-x)}{\cancel{2}}$$

$$\frac{1}{2}=x^2+x(1-x)$$

$$\frac{1}{2} = x^2 + x - x^2$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}.$$

Como o lado do quadrado menor é $\frac{1}{2}\,m$, então sua área é $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{4}\,m^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.