.Problema para ajudar na escola: Um problema não usual!

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Quantos pares de números inteiros a e b satisfazem a igualdade $a^2b^2+a^2+b^2+1=2005$?

Solução

Observe, inicialmente, que:

$$\begin{aligned} a^2b^2+a^2+b^2+1 &= \left(a^2b^2+a^2\right)+b^2+1 \\ &= a^2\left(b^2+1\right)+b^2+1 \\ &= a^2\left(b^2+1\right)+\left(b^2+1\right) \\ &= \left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right). \end{aligned}$$

Assim, temos que $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=2005$ e, como a e b são números inteiros, então a^2+1 e b^2+1 são divisores positivos de 2005.

Vamos, então, encontrar os divisores de 2005:

$$\begin{array}{r|l} 2005 & 5 \\ 401 & 401 \\ 1 & \end{array}$$

Consulte **esta tabela** e veja que 401 é primo! Depois de consultar a tabela, não se esqueça de fechar a janelinha que se abriu.

$$\begin{array}{r|l|ll} & & \boxed{1} & \\ 2005 & 5 & \boxed{5} & \\ 401 & 401 & \boxed{401} & \boxed{2005} \\ 1 & & & \end{array}$$

Temos então que $2005=5\times 401$ e os divisores positivos de 2005 são $1,\ 5,\ 401,\ 2005$; vamos analisá-los.

- Observe que $a^2+1\neq 2005$; pois, caso contrário, teríamos $a^2=2004$ e sabemos que 2004 não é um quadrado perfeito, já que $2004=2^2\times 3\times 167$.
- Analogamente, $b^2+1\neq 2005$; pois, caso contrário, teríamos $b^2=2004$ e já sabemos que 2004 não é um quadrado perfeito.
- Também $a^2+1\neq 1$; pois, caso contrário, teríamos $a=0$, o que acarretaria $b^2+1=2005$, que já sabemos não ser possível.
- De modo análogo, $b^2+1\neq 1$; pois, caso contrário, teríamos $b=0$, o que acarretaria $a^2+1=2005$, que também não é possível.

Assim, resta-nos apenas duas possibilidades:

(i) $a^2+1=5$ e $b^2+1=401$: Neste caso, $a^2=4$ e $b^2=400$, donde $a=\pm 2$ e $b=\pm 20$

(ii) $a^2+1=401$ e $b^2+1=5$: Neste caso, $a^2=400$ e $b^2=4$, donde $a=\pm 20$ e $b=\pm 2$

A tabela abaixo nos mostra que são oito pares de números inteiros a e b que satisfazem a igualdade $a^2b^2+a^2+b^2+1=2005$.

a	b	$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)$
2	20	$(2^2+1)(20^2+1)=5\cdot 401=2005$
2	-20	$(2^2+1)((-20)^2+1)=5\cdot 401=2005$
-2	20	$((-2)^2+1)(20^2+1)=5\cdot 401=2005$
-2	-20	$((-2)^2+1)((-20)^2+1)=5\cdot 401=2005$
20	2	$(20^2+1)(2^2+1)=401\cdot 5=2005$
20	-2	$(20^2+1)((-2)^2+1)=401\cdot 5=2005$
-20	2	$((-20)^2+1)(2^2+1)=401\cdot 5=2005$
-20	-2	$((-20)^2+1)((-2)^2+1)=401\cdot 5=2005$

Se você não se lembra dos processos que utilizamos para encontrar os divisores de 2005, consulte **esta página** .
Depois de terminar a leitura, não se esqueça de fechar a janelinha que irá se abrir.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Se for conveniente, você pode obter um arquivo desta página em PDF. Mas, para abrir esse arquivo, é necessário que você tenha o ***Adobe Acrobat Reader*** instalado no dispositivo que você está utilizando. Caso não tenha, é só clicar **AQUI** para fazer o download.
Se o seu dispositivo já tem o ***Adobe Acrobat Reader*** instalado, basta copiar o arquivo abaixo e abri-lo sempre que quiser!

Arquivo