

.Problema para ajudar na escola: Um problema não usual!



Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Quantos pares de números inteiros a e b satisfazem a igualdade $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2005$?

Solução

Observe, inicialmente, que:

$$\begin{aligned} a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 &= (a^2b^2 + a^2) + b^2 + 1 \\ &= a^2(b^2 + 1) + b^2 + 1 \\ &= a^2(b^2 + 1) + (b^2 + 1) \\ &= (a^2 + 1)(b^2 + 1). \end{aligned}$$

Assim, temos que $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = 2005$ e, como a e b são números inteiros, então $a^2 + 1$ e $b^2 + 1$ são divisores positivos de 2005.

Vamos, então, encontrar os divisores de 2005:

$$\begin{array}{r|l} 2005 & 5 \\ 401 & 401 \\ 1 & \end{array}$$

Consulte **esta tabela** e veja que 401 é primo! Depois de consultar a tabela, não se esqueça de fechar a janelinha que se abriu.

$$\begin{array}{r|l} 2005 & 5 \\ 401 & 401 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{5} \\ \boxed{401} \quad \boxed{2005} \end{array}$$

Temos então que $2005 = 5 \times 401$ e os divisores positivos de 2005 são 1, 5, 401, 2005 ; vamos analisá-los.

- Observe que $a^2 + 1 \neq 2005$; pois, caso contrário, teríamos $a^2 = 2004$ e sabemos que 2004 não é um quadrado perfeito, já que $2004 = 2^2 \times 3 \times 167$.
- Analogamente, $b^2 + 1 \neq 2005$; pois, caso contrário, teríamos $b^2 = 2004$ e já sabemos que 2004 não é um quadrado perfeito.
- Também $a^2 + 1 \neq 1$; pois, caso contrário, teríamos $a = 0$, o que acarretaria $b^2 + 1 = 2005$, que já sabemos não ser possível.
- De modo análogo, $b^2 + 1 \neq 1$; pois, caso contrário, teríamos $b = 0$, o que acarretaria $a^2 + 1 = 2005$, que também não é possível.

Assim, resta-nos apenas duas possibilidades:

(i) $a^2 + 1 = 5$ e $b^2 + 1 = 401$: Neste caso, $a^2 = 4$ e $b^2 = 400$, donde $a = \pm 2$ e $b = \pm 20$

(ii) $a^2 + 1 = 401$ e $b^2 + 1 = 5$: Neste caso, $a^2 = 400$ e $b^2 = 4$, donde $a = \pm 20$ e $b = \pm 2$

A tabela abaixo nos mostra que são oito pares de números inteiros a e b que satisfazem a igualdade $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = 2005$.

a	b	$(a^2 + 1)(b^2 + 1)$
2	20	$(2^2 + 1)(20^2 + 1) = 5 \cdot 401 = 2005$
2	-20	$(2^2 + 1)((-20)^2 + 1) = 5 \cdot 401 = 2005$
-2	20	$((-2)^2 + 1)(20^2 + 1) = 5 \cdot 401 = 2005$
-2	-20	$((-2)^2 + 1)((-20)^2 + 1) = 5 \cdot 401 = 2005$
20	2	$(20^2 + 1)(2^2 + 1) = 401 \cdot 5 = 2005$
20	-2	$(20^2 + 1)((-2)^2 + 1) = 401 \cdot 5 = 2005$
-20	2	$((-20)^2 + 1)(2^2 + 1) = 401 \cdot 5 = 2005$
-20	-2	$((-20)^2 + 1)((-2)^2 + 1) = 401 \cdot 5 = 2005$



Se você não se lembra dos processos que utilizamos para encontrar os divisores de 2005, consulte [esta página](#). Depois de terminar a leitura, não se esqueça de fechar a janelinha que irá se abrir.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

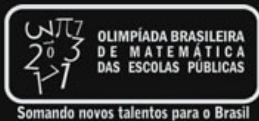


Se for conveniente, você pode obter um arquivo desta página em PDF. Mas, para abrir esse arquivo, é necessário que você tenha o *Adobe Acrobat Reader* instalado no dispositivo que você está utilizando. Caso não tenha, é só clicar [AQUI](#) para fazer o download.

Se o seu dispositivo já tem o *Adobe Acrobat Reader* instalado, basta copiar o arquivo abaixo e abri-lo sempre que quiser!

Arquivo

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

