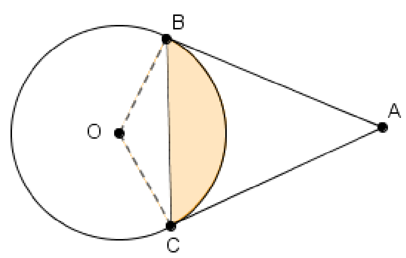
Clubes de Matemática da OBMEP

.Problema para ajudar na escola: Um problema de área!

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

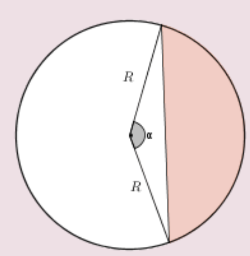
(UFMG) Observe a figura.



Nessa figura, $OA = 4\sqrt{3}$, $OB = 2\sqrt{3}$ e $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ tangenciam a circunferência de centro O em B e C.

Qual a área da região colorida?

Para ajudar . . .



Área de um segmento circular de raio R e α radianos

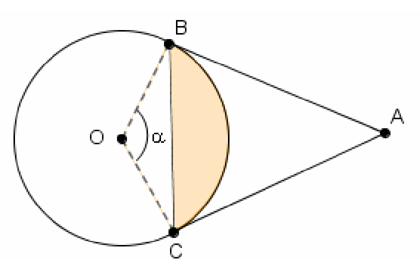
$$\boxed{A_{segm} = \frac{R^2}{2}(\alpha - sen\,\alpha)}$$

Toda tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

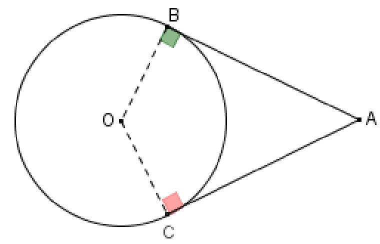
Dois triângulos retângulos que tenham ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa são congruentes

Solução

Observe que a região colorida da qual calcularemos a área é um segmento circular; assim, como já conhecemos o raio do círculo que define esse segmento circular, será necessário apenas determinar a medida do ângulo central α que o define.

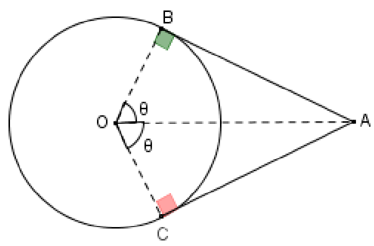


Para isso, observe inicialmente que, como "toda reta tangente à uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência":



- o ângulo $O\widehat{B}A$ é um ângulo reto;
- o ângulo $O\widehat{C}A$ é um ângulo reto.

Dessa forma, os triângulos ABO e ACO são triângulos retângulos com hipotenusas congruentes (a hipotenusa é comum aos dois) e dois catetos congruentes (cada um tem um raio como cateto); portanto ABO **e** ACO **são triângulos congruentes**.



Assim, para calcular α, basta calcular a medida θ destaca na figura ao lado, já que $\alpha = 2\theta$.
A partir do triângulo ABO, por exemplo, podemos observar que:

$$cos\,\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

Então, $\theta = \dfrac{\pi}{3}\,rad$ e, portanto, $\boxed{\alpha = \dfrac{2\pi}{3}\,rad}$.

Finalmente, podemos calcular a área do segmento circular determinado pela corda BC:

$$\begin{aligned} A_{segm} &= \frac{R^2}{2}(\alpha - sen\,\alpha) \\ &= \frac{(2\sqrt{3})^2}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - sen\,\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 6\left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{6}\right) \\ &= 4\pi - 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Portanto, a área da região colorida é $\boxed{4\pi - 3\sqrt{3}}$.

É comum a confusão entre dois objetos geométricos distintos: **setor circular** e **segmento circular**. Ambos dependem de uma circunferência e de um ângulo central, eles têm certa relação entre si, mas são objetos distintos.
Se você não se lembra desses dois objetos, clique no botão abaixo e aprenda um pouco mais.

Sala de ajuda

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.