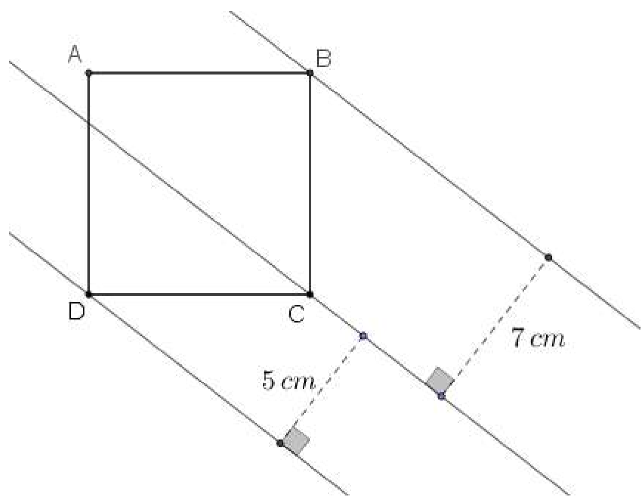
.Problema para ajudar na escola: Três retas paralelas e um quadrado

Problema

(A partir do 8º ano do E. F.)

(**OPM** – 2005) Foram traçadas três retas paralelas passando pelos vértices B, C e D do quadrado $ABCD$, conforme mostra a figura.
A reta que passa por C dista $7\,cm$ da que passa por B e $5\,cm$ da que passa por D.



Qual a área do quadrado $ABCD$?

Lembretes

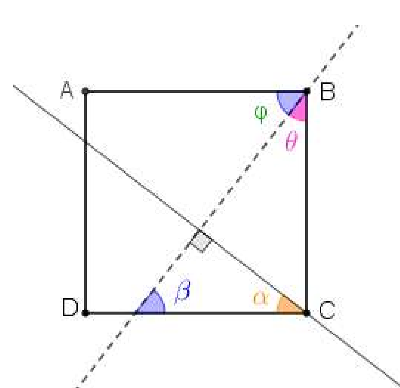
(1) A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(2) Ângulos alternos internos têm a mesma medida. (Se você não se lembra dos ângulos alternos internos, clique **AQUI**.)

(3) Caso de congruência L.A.A$_o$. (lado – ângulo – ângulo oposto): Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então estes triângulos são congruentes. (Se você não se lembra dos casos de congruência de triângulos, clique **AQUI**.)

Solução

Das três paralelas que aparecem na imagem do enunciado do problema, vamos, inicialmente, observar apenas a que passa por C e traçar uma perpendicular a ela que passa pelo ponto B.
Vamos observar com cuidado os quatro ângulos cujas medidas α, β, φ e θ aparecem destacadas na figura ao lado e para isso consideraremos as medidas dos ângulos em graus.

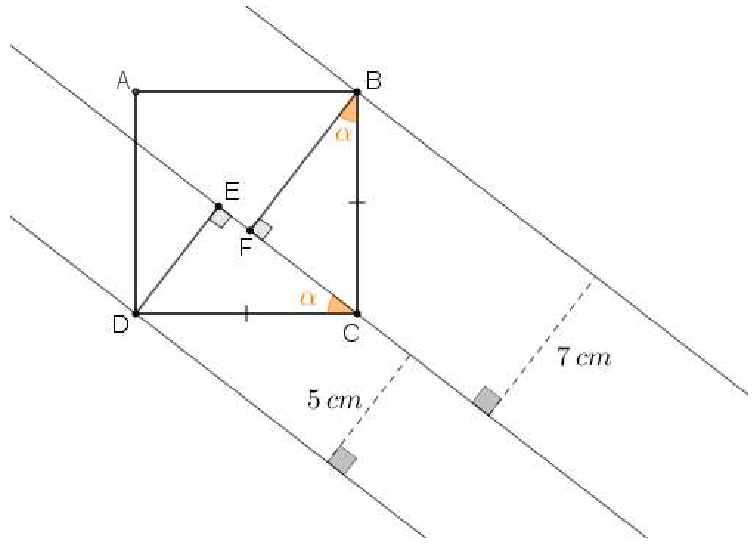


- Perceba que os ângulos cujas medidas são β e φ são **alternos internos**, logo $\boxed{\beta = \varphi}$. $\quad (i)$
- Note que os ângulos cujas medidas são θ e φ são **ângulos complementares**, isto é, $\theta + \varphi = 90^\circ$. Mas, por (i), $\beta = \varphi$, portanto $\theta + \beta = 90^\circ$ e, então,

$\boxed{\beta = 90^\circ - \theta}$. (ii)

- Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° , podemos concluir que $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$ e, assim, $\alpha + \beta = 90^\circ$. No entanto, por (ii) , $\boxed{\beta = 90^\circ - \theta}$; logo, segue que:
  $\alpha + \beta = 90^\circ$
  $\alpha + \left(\cancel{90^\circ} - \theta\right) = \cancel{90^\circ}$
  $\boxed{\alpha = \theta}$. (iii)

Considere agora os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{BF}$, perpendiculares às retas paralelas.



Veja que, utilizando o **Caso de congruência L.A.A$_o$.**, podemos concluir que os triângulos BCF e CDE são congruentes e, consequentemente, os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{CF}$ têm o mesmo tamanho: $5\,cm$ (Assim como $\overline{FB}$ e $\overline{EC}$: $7\,cm$.).
Dessa forma, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras em qualquer um dos triângulos BCF e CDE. Portanto, se l é o lado do quadrado $ABCD$, segue que:

$$l^2 = 5^2 + 7^2 = 25 + 49 = 74\,cm^2 \,.$$

Como l^2 é exatamente a área do quadrado $ABCD$, finalmente podemos concluir que a área do quadrado $ABCD$ é $\boxed{74\,cm^2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.