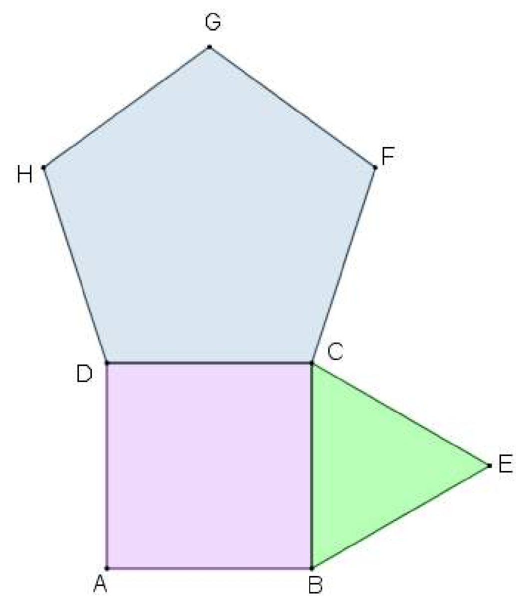
.Problema para ajudar na escola: Todos regulares

Problema

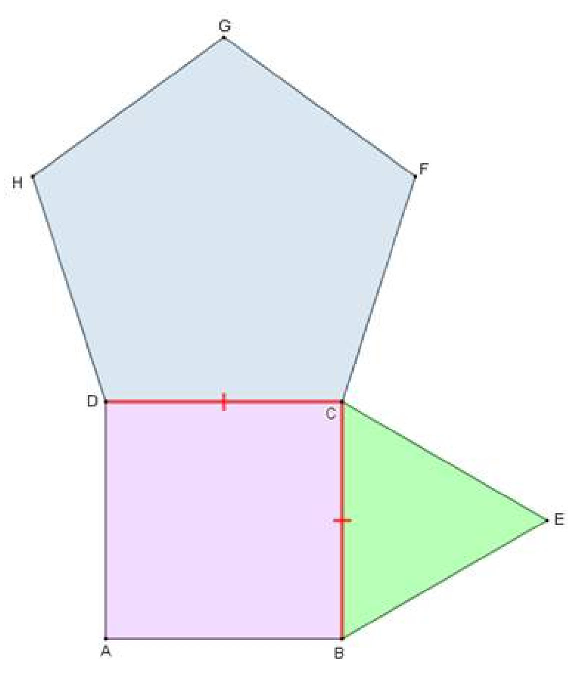
(A partir do 9º ano do E. F.)

A figura abaixo mostra um triângulo equilátero, um quadrado e um pentágono regular.
Determinar a soma em graus das medidas dos ângulos $E\hat{A}D$ e $E\hat{F}D$.



Solução

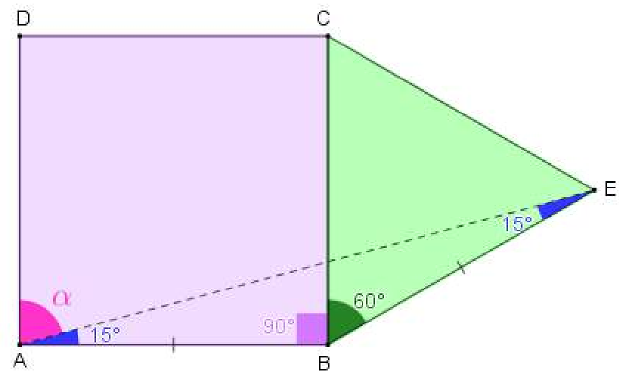
(1) Inicialmente, observe que o triângulo e o pentágono são regulares e ambos têm um lado em comum com o quadrado (que é um quadrilátero regular).



Assim, os lados do triângulo, do pentágono e do quadrado têm todos o mesmo comprimento.

(2) Vamos determinar a medida α, em graus, do ângulo $E\hat{A}D$.

- Como BCE é um triângulo equilátero, a medida do ângulo $E\hat{B}C$ é 60°.
- Como $ABCD$ é um quadrado, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 90°.
- A aresta BC é comum ao quadrado e ao triângulo, donde $AB = BE$ e, portanto, o triângulo ABE é isósceles.
- A medida do ângulo $E\hat{B}A$ é dada por $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$.
- Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e o triângulo ABE é isósceles, temos que a medida de $E\hat{A}B$ é
$$\frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

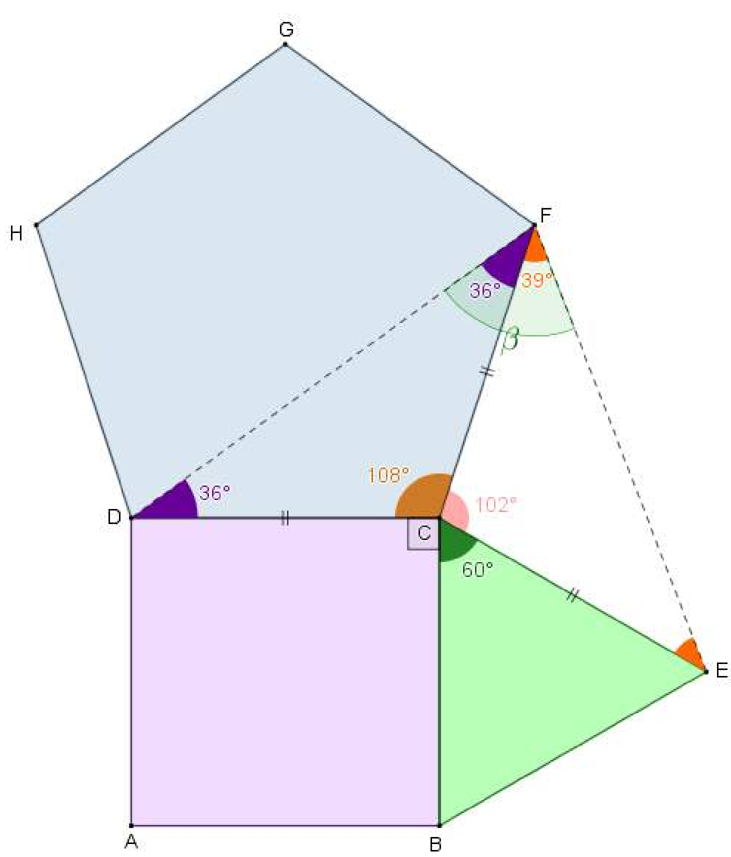


Assim, a medida de $E\hat{A}D$ é a diferença entre as medidas dos ângulos $D\hat{A}B$ e $E\hat{A}B$ e, dessa forma,

$$\boxed{\alpha = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ}\,. \qquad (i)$$

(3) Agora, vamos determinar a medida β, em graus, do ângulo $E\hat{F}D$.

- Como o pentágono $DCFGH$ é regular, $D\hat{C}F = 108^\circ$. (Se você não sabe como justificar esse resultado, clique **AQUI**).
- Observando os ângulos em torno do vértice C vemos que a medida do ângulo $E\hat{C}F$ pode ser assim obtida:
$$360^\circ - (108^\circ + 90^\circ + 60^\circ) = 102^\circ.$$
- Perceba que o triângulo FCE é isósceles; logo, os seus ângulos da base têm a mesma medida. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, podemos então concluir que a medida do ângulo $E\hat{F}C$ é:
$$\frac{180^\circ - 102^\circ}{2} = \frac{78^\circ}{2} = 39^\circ.$$
- O triângulo FCD também é isósceles e a medida do ângulo $C\hat{F}D$ pode ser assim calculada:
$$\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ.$$



Portanto:

$$\boxed{\beta = 39^\circ + 36^\circ = 75^\circ}\ . \qquad (ii).$$

Por (i) e (ii), concluímos que os ângulos $E\hat{A}D$ e $E\hat{F}D$ têm a mesma medida e a soma das duas medidas solicitada no problema é $\boxed{75^\circ + 75^\circ = 150^\circ}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.