.Problema para ajudar na escola: Subconjuntos e somas

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Sem efetuar adições, determinar quantos subconjuntos de três elementos do conjunto

$$\{245896\,,\,985639541\,,\,609326959806695631\,,\,56823682\,,\,147546085389595866\,,\,487935968565873\}$$

têm a propriedade de que a soma de seus elementos é um número par.

Solução

No conjunto dado, temos seis números: três pares e três ímpares. Tomados três a três, esses números podem ser assim agrupados:

- três pares;
- dois pares e um ímpar;
- um par e dois ímpares;
- três ímpares.

Analisando a paridade das somas dos três números nos quatro casos apresentados, temos que:

- $par + par + par = par$;
- $par + par + ímpar = ímpar$;
- $par + ímpar + ímpar = par$;
- $ímpar + ímpar + ímpar = ímpar$.

Pela exigência do problema, a soma dos três números deve ser um número par, então nos interessa saber quantos subconjuntos com "três números pares" e quantos com "um número par e dois ímpares" podemos formar, a partir do conjunto dado. Vejamos:

(i) Como temos apenas três números pares, será possível construir apenas um subconjunto com **três números pares**.

(ii) Para a escolha de **um número par e dois ímpares**, podemos escolher o número par de três modos diferentes. Para cada uma dessas escolhas, temos que escolher dois dentre os ímpares possíveis:

- o primeiro ímpar pode ser escolhido de três formas diferentes, já que temos três ímpares no conjunto dado;
- escolhido o primeiro ímpar, podemos escolher o segundo de duas maneiras diferentes.

A princípio, teríamos então $3 \times 3 \times 2 = 18$ maneiras de escolher os três números.

$$\underset{\text{único par}}{\underline{\quad 3 \quad}} \qquad \underset{\text{primeiro ímpar}}{\underline{\quad 3 \quad}} \qquad \underset{\text{segundo ímpar}}{\underline{\quad 2 \quad}}$$

No entanto, observe que os conjuntos $\{par\,,\,ímpar_1\,,\,ímpar_2\,\}$ e $\{par\,,\,ímpar_2\,,\,ímpar_1\,\}$ são iguais. Assim, fixado um número par, escolher o $ímpar_1$ e, em seguida, o $ímpar_2$, vai produzir o mesmo subconjunto resultante de escolhermos o $ímpar_2$ e em seguida o $ímpar_1$. Dessa forma, devemos dividir as 18 maneiras de escolher os três números por dois, para não contarmos duas vezes os conjuntos que tenham os mesmos números ímpares em sua composição. Com isso teremos $\dfrac{18}{2}=9$ maneiras de escolher um par e dois ímpares.

Observação: Escolhido o número par, observamos que "**escolher dois entre os três ímpares é equivalente a escolher um dos três para ficar de fora**". Assim, temos três maneiras de escolher o que não irá ficar no conjunto e, com isso, teríamos as mesmas $3\times 3=9$ maneiras de escolher os três números, sendo um par e dois ímpares.

$$\underset{\text{único par}}{\underline{3}}\qquad\underset{\text{dois ímpares}}{\underline{3}}$$

Portanto, por (i) e (ii), temos $\boxed{1+9=10}$ subconjuntos com a propriedade de que a soma de seus elementos é um número par.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.