.Problema para ajudar na escola: Senos e cossenos

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Determinar o menor número real positivo x tal que $\boxed{\text{sen } 2x \cdot \text{sen } 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x}$.

Observe que o problema pede uma solução real, assim vamos trabalhar com os argumentos das funções trigonométricas em **radianos** e não em **graus**.

Solução

Precisamos relembrar uma propriedade da trigonometria conhecida como **cosseno da soma** para resolver este problema:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b} \ .$$

A partir dessa propriedade, podemos afirmar que:

$$\cos 2x \cdot \cos 3x - \text{sen } 2x \cdot \text{sen } 3x = \cos(2x+3x) = \cos 5x \qquad (i)$$

e, a partir da igualdade fornecida pelo problema, obtemos que:

$$\cos 2x \cdot \cos 3x - \text{sen}2x \cdot \text{sen}3x = 0. \qquad (ii)$$

Por (i) e (ii), concluímos que $\cos 5x = 0$; assim, precisamos determinar o menor número real positivo x para o qual $\boxed{\cos 5x = 0}$.

Dado que $\cos \dfrac{\pi}{2} = 0$, temos que $\cos 5x = \cos \dfrac{\pi}{2}$ e, portanto, $5x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Pelo exposto, o conjunto solução da equação $\cos 5x = 0$ é

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = \pm\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}, \text{com } k \text{ inteiro}\right\}.$$

Dentre os elementos de S, queremos o menor positivo, logo precisamos determinar qual o valor inteiro de k que produz tal elemento. Vamos analisar, separadamente, as soluções da forma $\boxed{x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}}$ e da forma $\boxed{x = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}}$.

- Quais números da forma $x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}$ são positivos?

  Vamos calculá-los, observando a seguinte sequência de desigualdades equivalentes:

$$\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} > 0$$
$$\frac{2k\pi}{5} > -\frac{\pi}{10}$$
$$k\pi > -\frac{5\pi}{20}$$
$$k\pi > -\frac{\pi}{4}$$
$$k > -\frac{1}{4}.$$

Observe agora que "quanto menor/maior o valor de k, menor/maior será o valor de x"; assim, vamos escolher o menor valor inteiro de k tal que $k > -\dfrac{1}{4}$. Claramente observamos que esse valor é $k = 0$, e $k = 0$ define

$$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{5} = \frac{\pi}{10}}.$$

- Quais números da forma $x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$ são positivos?

  Vamos calculá-los observando, agora, a seguinte sequência de desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} > 0\\
&\frac{2k\pi}{5} > \frac{\pi}{10}\\
&k\pi > \frac{5\pi}{20}\\
&k\pi > \frac{\pi}{4}\\
&k > \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Note mais uma vez que "quanto menor/maior o valor de k, menor/maior será o valor de x"; assim, vamos escolher o menor valor inteiro de k tal que $k > \frac{1}{4}$. Aqui, claramente observamos que o valor é $k = 1$ e perceba que $k = 1$ define

$$\boxed{x_2 = -\frac{\pi}{10} + \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{5} = -\frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{10} = \frac{3\pi}{10}}.$$

Finalmente, como $\frac{\pi}{10} < \frac{3\pi}{10}$, a solução do problema é $\boxed{x = \frac{\pi}{10}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ❤ por Temas Graphene.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
Somando novos talentos para o Brasil

Apoio
CAPES CNPq SBM

Realização
impa MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E COMUNICAÇÕES MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO PÁTRIA AMADA BRASIL GOVERNO FEDERAL