.Problema para ajudar na escola: Seno, cosseno, tangente

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Em um triângulo retângulo ABC, com ângulo reto no vértice C, temos que

$$6(cos^3 \hat{A}) = \frac{sen\hat{A} + sen\hat{B}}{tan\hat{A} + tan\hat{B}}.$$

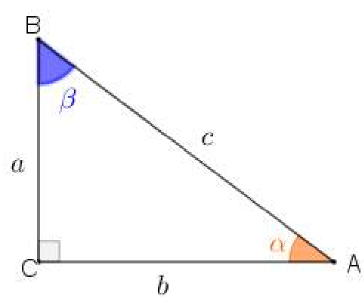
Determine $tan\hat{A}$.

Lembrete

Para solucionar este problema, vamos precisar de algumas das relações entre as medidas dos lados e dos ângulos internos de um triângulo retângulo. Seja, então, um triângulo retângulo ABC, cujos lados têm comprimentos a, b, c e os ângulos agudos têm medidas α e β, conforme indicado na figura.

Então:

- $sen\ \hat{A} = sen\ \alpha = \dfrac{a}{c} = cos\ \beta = cos\ \hat{B}$
- $cos\ \hat{A} = cos\ \alpha = \dfrac{b}{c} = sen\ \beta = sen\ \hat{B}$
- $tan\ \hat{A} = tan\ \alpha = \dfrac{a}{b}$
- $tan\ \hat{B} = tan\ \beta = \dfrac{b}{a}$



Solução 1

Seja ABC um triângulo retângulo.

A partir da notação indicada na figura do **Lembrete**, podemos reescrever a igualdade fornecida no problema; observe:

$$6(cos^3 \hat{A}) = \frac{sen\hat{A} + sen\hat{B}}{tan\hat{A} + tan\hat{B}}$$

$$6\left(\frac{b}{c}\right)^3 = \frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}$$

$$6\left(\frac{b^3}{c^3}\right) = \frac{\frac{a+b}{c}}{\frac{a^2+b^2}{ab}}$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $a^2 + b^2 = c^2$, assim:

$$6\left(\frac{b^3}{c^3}\right)=\frac{\frac{a+b}{c}}{\frac{c^2}{ab}}$$

$$6\left(\frac{b^3}{c^3}\right)=\frac{ab(a+b)}{c^3}$$

$$6b^2=a(a+b)$$

$$a^2+ab-6b^2=0. \qquad (i)$$

Essa última igualdade mostra a relação entre os comprimentos a e b dos catetos de um triângulo retângulo que satisfaz a igualdade indicada no problema.

Como $a\neq 0$ e $b\neq 0$, pois ambos são comprimentos dos catetos de um triângulo, podemos olhar a equação (i) como uma equação do segundo grau na variável a ou b e se aplicarmos a fórmula de resolução de uma equação do segundo grau podemos escrever a em função de b ou b em função de a. Particularmente, vamos considerar (i) como uma equação do segundo grau na variável a e dessa forma teremos que:

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-(4\times(-6b^2))}}{2}$$

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+24b^2}}{2}$$

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{25b^2}}{2}$$

Como sabemos que $b>0$, pois é uma medida, temos que:

$$a=\frac{-b\pm 5b}{2}$$

$$a=\frac{-b+5b}{2} \quad \text{ou} \quad a=\frac{-b-5b}{2}$$

$$a=\frac{4b}{2} \quad \text{ou} \quad a=\frac{-6b}{2}$$

$$a=2b \quad \text{ou} \quad a=-3b$$

Como a e b são positivos, a igualdade $a=-3b$ não nos interessa. Assim, $a=2b$ e, portanto,

$$\boxed{tan\,\hat{A}=\frac{a}{b}=\frac{2b}{b}=2}.$$

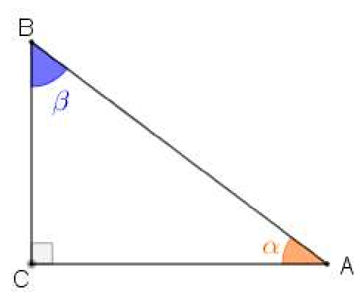
Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Ajuda para a segunda Solução

Para a próxima solução, precisaremos de algumas das relações do **Lembrete**, mas escritas de maneira diferente.

Considere um triângulo retângulo ABC, cujos ângulos agudos têm medidas α e β, conforme indicado na figura.

- $sen\,\hat{A}=sen\,\alpha=cos\,\beta=cos\,\hat{B}$
- $cos\,\hat{A}=cos\,\alpha=sen\,\beta=sen\,\hat{B}$
- $tan\,\hat{A}=tan\,\alpha=\dfrac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$
- $tan\,\hat{B}=tan\,\beta=\dfrac{sen\,\beta}{cos\,\beta}$



Solução 2

Seja ABC um triângulo retângulo.

A partir da notação indicada na figura da **Ajuda**, podemos reescrever a igualdade fornecida no problema da seguinte maneira:

$$6(cos^3\,\hat{A}) = \frac{sen\,\hat{A}+sen\,\hat{B}}{tan\,\hat{A}+tan\,\hat{B}} = \frac{sen\,\hat{A}+cos\,\hat{A}}{\frac{sen\,\hat{A}}{cos\,\hat{A}}+\frac{sen\,\hat{B}}{cos\,\hat{B}}}$$
$$= \frac{sen\,\hat{A}+cos\,\hat{A}}{\frac{sen\,\hat{A}}{cos\,\hat{A}}+\frac{cos\,\hat{A}}{sen\,\hat{A}}} = \frac{sen\,\hat{A}+cos\,\hat{A}}{\frac{sen^2\,\hat{A}+cos^2\,\hat{A}}{cos\,\hat{A}\cdot sen\,\hat{A}}}$$

A relação fundamental da trigonometria nos garante que $sen^2\,\hat{A}+cos^2\,\hat{A}=1$, assim:

$$6(cos^3\,\hat{A}) = \frac{sen\,\hat{A}+cos\,\hat{A}}{\frac{sen^2\,\hat{A}+cos^2\,\hat{A}}{cos\,\hat{A}\cdot sen\,\hat{A}}} = \frac{sen\,\hat{A}+cos\,\hat{A}}{\frac{1}{cos\,\hat{A}\cdot sen\,\hat{A}}}$$
$$= cos\,\hat{A}\cdot sen\,\hat{A}\cdot\left(sen\,\hat{A}+cos\,\hat{A}\right).$$

Como $\hat{A}$ é um ângulo agudo, então $cos\,\hat{A}\neq 0$; portanto podemos simplificar a última igualdade e, assim:

$$6(cos^2\,\hat{A}) = sen\,\hat{A}\cdot\left(sen\,\hat{A}+cos\,\hat{A}\right)$$
$$sen\,\hat{A}\left(sen\,\hat{A}+cos\,\hat{A}\right)-6(cos^2\,\hat{A})=0$$
$$sen^2\hat{A}+sen\,\hat{A}\cdot cos\,\hat{A}-6cos^2\,\hat{A}=0.$$

Agora, um artifício: $\boxed{sen\,\hat{A}\cdot cos\,\hat{A}} = \boxed{3sen\,\hat{A}\cdot cos\,\hat{A}-2sen\,\hat{A}\cdot cos\,\hat{A}}$, logo:

$$sen^2\hat{A}+\left(sen\,\hat{A}\cdot cos\,\hat{A}\right)-6cos^2\,\hat{A}=0$$
$$sen^2\hat{A}+\left(3sen\,\hat{A}\cdot cos\,\hat{A}-2sen\,\hat{A}\cdot cos\,\hat{A}\right)-6cos^2\,\hat{A}=0$$
$$\left(sen^2\hat{A}-2sen\,\hat{A}\cdot cos\,\hat{A}\right)+\left(3sen\,\hat{A}\cdot cos\,\hat{A}-6cos^2\,\hat{A}\right)=0$$
$$sen\,\hat{A}\left(sen\,\hat{A}-2cos\,\hat{A}\right)+3cos\,\hat{A}\left(sen\,\hat{A}-2cos\,\hat{A}\right)=0$$
$$\left(sen\,\hat{A}+3cos\,\hat{A}\right)\left(sen\,\hat{A}-2cos\,\hat{A}\right)=0. \qquad (i)$$

Sabemos que se um produto é igual a zero, então um dos fatores é zero, não é? Então, segue de (i) que:

▶ $\boxed{\left(sen\,\hat{A}+3cos\,\hat{A}\right)=0}$ ou $\boxed{\left(sen\,\hat{A}-2cos\,\hat{A}\right)=0}$.

Mais uma vez observamos que $\hat{A}$ é um ângulo agudo; logo, $cos\,\hat{A}>0$ e $sen\,\hat{A}>0$. Portanto, $\left(sen\,\hat{A}+3cos\,\hat{A}\right)>0$ e com isso necessariamente $\left(sen\,\hat{A}-2cos\,\hat{A}\right)=0$.

Mas se $sen\,\hat{A}-2cos\,\hat{A}=0$ e $cos\,\hat{A}\neq 0$, segue que:

$$sen\,\hat{A}-2cos\,\hat{A}=0$$
$$sen\,\hat{A}=2cos\,\hat{A}$$
$$\frac{sen\,\hat{A}}{cos\,\hat{A}}=2$$

$\boxed{tan\,\hat{A}=2}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.