



.Problema para ajudar na escola: Senhas para cartões de acesso



Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

(UFJF-MG: 2007) Uma empresa fornece a seus funcionários um cartão de acesso ao seu escritório e uma senha, que é um número com quatro algarismos, escolhidos dentre os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

Não são admitidas senhas em que um mesmo algarismo apareça três vezes ou mais.

Qual é o número máximo de senhas que poderão ser oferecidas pela empresa?

Solução

- Observe inicialmente que, se considerarmos a quantidade de senhas possíveis sem restrições, teremos $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ senhas. (i)
- As senhas nas quais aparece um mesmo algarismo são: **4444; 3333; 2222; 1111**.
Portanto são **4** senhas constituídas por apenas um algarismo. (ii)
- As senhas nas quais um mesmo algarismo **X** aparece exatamente três vezes têm os seguintes formatos: **_XXX; X_XX; XX_X; XXX_**. Assim, fixado um algarismo **X**, perceba que:
 - o primeiro dígito da senha **_XXX** pode ser escolhido de três modos diferentes;
 - o segundo dígito da senha **X_XX** pode ser escolhido de três modos diferentes;
 - o terceiro dígito da senha **XX_X** pode ser escolhido de três modos diferentes;
 - o quarto dígito da senha **XXX_** pode ser escolhido de três modos diferentes.

Portanto, fixado um algarismo **X**, podemos construir $4 \times 3 = 12$ senhas contendo exatamente três algarismos iguais a **X**. E como podemos escolher o algarismo **X** de 4 maneiras, existem $4 \times 12 = 48$ senhas com três algarismos iguais. (iii)

Finalizando, por (i), (ii) e (iii), o número máximo de senhas que poderão ser oferecidas pela empresa em questão é dado por

$$256 - 4 - 48 = 204.$$

Solução elaborada pelos Moderadores do Blog.