.Problema para ajudar na escola: Sen, cos, tg, cotg, sec, cossec

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Determinar os dois valores de x mais próximos a 2003° (por falta e por excesso) que cumprem a seguinte equação trigonométrica:

$$\frac{1}{sen^2 x}-\frac{1}{cos^2 x}-\frac{1}{tg^2 x}-\frac{1}{cotg^2 x}-\frac{1}{sec^2 x}-\frac{1}{cossec^2 x}=-3.$$

Solução

- Utilizando definições básicas da trigonometria,

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{sen^2 x} & \frac{1}{cos^2 x} & \frac{1}{tg^2 x} & \frac{1}{cotg^2 x} & \frac{1}{sec^2 x} & \frac{1}{cossec^2 x} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
cossec^2 x & sec^2 x & cotg^2 x & tg^2 x & cos^2 x & sen^2 x
\end{array},$$

podemos reescrever a igualdade dada no problema da seguinte forma:

$$\boxed{cossec^2 x - sec^2 x - cotg^2 x - tg^2 x - cos^2 x - sen^2 x = -3}\,.$$

- Perceba agora que podemos utilizar relações fundamentais da trigonometria e reescrever a equação obtida a partir, apenas, de tangentes e cotangentes:

$$cossec^2 x - sec^2 x - cotg^2 x - tg^2 x - cos^2 x - sen^2 x = -3$$
$$cossec^2 x - sec^2 x - cotg^2 x - tg^2 x - \left(cos^2 x + sen^2 x\right) = -3$$
$$\left(1 + cotg^2 x\right) - \left(1 + tg^2 x\right) - cotg^2 x - tg^2 x - 1 = -3$$

- Fazendo as simplificações possíveis na última igualdade, obtemos uma equação trigonométrica relativamente simples. Observe:

$$\left(1 + cotg^2 x\right) - \left(1 + tg^2 x\right) - cotg^2 x - tg^2 x - 1 = -3$$
$$1 + cotg^2 x - 1 - tg^2 x - cotg^2 x - tg^2 x - 1 = -3$$
$$\cancel{1} + \cancel{cotg^2 x} - \cancel{1} - tg^2 x - \cancel{cotg^2 x} - tg^2 x - 1 = -3$$
$$-tg^2 x - tg^2 x - 1 = -3$$
$$2tg^2 x = 2$$
$$\boxed{tg^2 x = 1}\,.$$

Mudamos nosso foco; agora temos que resolver a equação $\boxed{tg^2 x = 1}$.

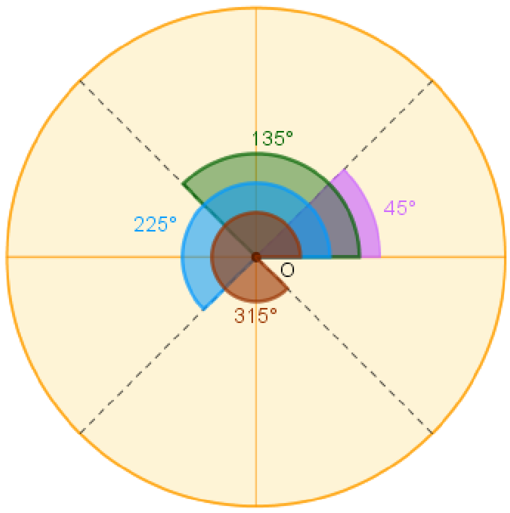
- Algebricamente, temos que:

$$tg^2 x = 1$$
$$\sqrt{tg^2 x} = \sqrt{1}$$
$$\sqrt{(tg\,x)^2} = 1$$
$$|tg\,x| = 1$$
$$tg\,x = \pm 1\,. \qquad (i)$$

Voltemos à Trigonometria...

Sabemos que $tg\,x = \dfrac{sen\,x}{cos\,x}$; assim, como $tg\,x = \pm 1$, então $sen\,x = \pm cos\,x$, ou seja, estamos procurando ângulos cujos respectivos senos e cossenos são iguais ou diferem apenas por sinal. Consultando uma tabela trigonométrica, uma calculadora científica ou o quadro abaixo, verificamos rapidamente que $tg\,45^\circ = 1$, então $\theta = 45^\circ$ é um dos infinitos ângulos que satisfazem a equação (i).

Olhando o círculo trigonométrico, percebemos quatro ângulos que satisfazem (i): $\theta_1 = 45^\circ$; $\theta_2 = 135^\circ$; $\theta_3 = 225^\circ$ e $\theta_4 = 315^\circ$.

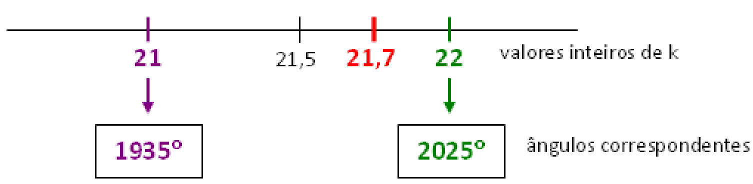


$cos\ 45^\circ \approx 0.71$
$sen\ 45^\circ \approx 0.71$
$cos\ 135^\circ \approx -0.71$
$sen\ 135^\circ \approx 0.71$
$cos\ 225^\circ \approx -0.71$
$sen\ 225^\circ \approx -0.71$
$cos\ 315^\circ \approx 0.71$
$sen\ 315^\circ \approx -0.71$

A solução geral da equação (i) é dada por $\boxed{x = 45^\circ + 90^\circ k}$, com $k \in \mathbb{Z}$, mas queremos as soluções mais próximas ao valor 2003°. Dessa forma, deveremos encontrar números inteiros k_1 e k_2 tais que $\boxed{45^\circ + 90^\circ k_1 \leqslant 2003^\circ \leqslant 45^\circ + 90^\circ k_2}$; vamos lá:

$$45^\circ + 90^\circ k_1 \leqslant 2003^\circ \leqslant 45^\circ + 90^\circ k_2$$
$$90^\circ k_1 \leqslant 1958^\circ \leqslant 90^\circ k_2$$
$$k_1 \leqslant \frac{1958^\circ}{90^\circ} \leqslant k_2$$
$$k_1 \leqslant 21,7 \leqslant k_2.$$

Portanto, os valores inteiros em questão são $k_1 = 21$ e $k_2 = 22$ e os valores solicitados no problema são $\boxed{1935^\circ}$ e $\boxed{2025^\circ}$.



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.