.Problema para ajudar na escola: Qual é o menor valor?

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Qual é o menor valor possível para $A=|cos\,x|+|sen\,x|$?

Solução 1

Uma observação inicial:

- **Como A é não negativo, então A vai ser mínimo quando A^2 for mínimo!**

Veja que, elevando ao quadrado a expressão do enunciado, obtemos:

$$A^2=(|cos\,x|+|sen\,x|)^2$$
$$A^2=(|cos\,x|)^2+2\cdot|cos\,x|\cdot|sen\,x|+(|sen\,x|)^2$$
$$A^2=(cos\,x)^2+2\cdot|cos\,x|\cdot|sen\,x|+(sen\,x)^2$$
$$A^2=cos^2x+2\cdot|cos\,x|\cdot|sen\,x|+sen^2x$$
$$A^2=cos^2x+sen^2x+|2\cdot cos\,x\cdot sen\,x|. \qquad (i)$$

Sabemos que $\boxed{cos^2x+sen^2x=1}$ e que $\boxed{2\cdot cos\,x\cdot sen\,x=sen\,2x}$; assim, segue de (i) que

$$A^2=\left(cos^2x+sen^2x\right)+|2\cdot cos\,x\cdot sen\,x|$$
$$A^2=1+|sen\,2x|$$
$$A^2-1=|sen\,2x|. \qquad (ii)$$

Por outro lado, $|sen\,2x|\geqslant 0$; logo, por (ii), $A^2-1\geqslant 0$, ou seja, $A^2\geqslant 1$.

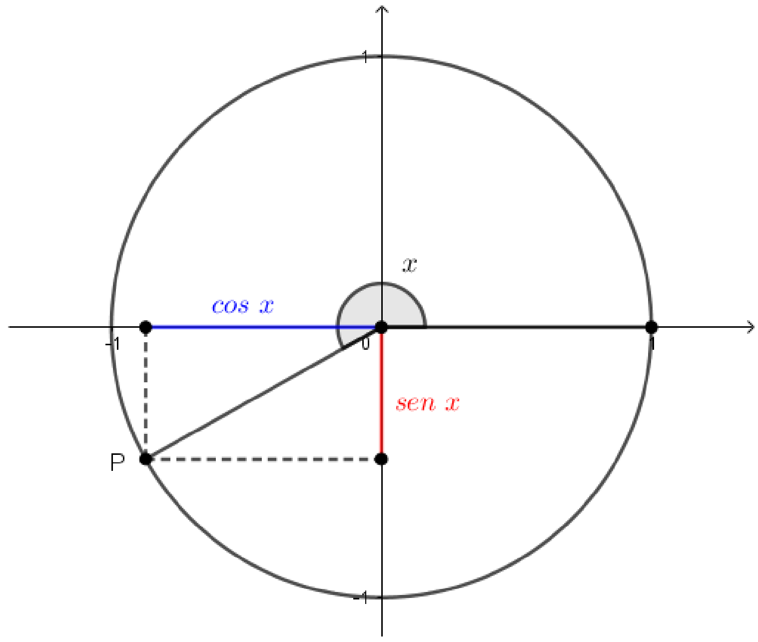
Portanto, o valor mínimo de A^2 é 1, e, sendo $A>0$, concluímos que o menor valor de A é 1. (Esse valor pode ser obtido, por exemplo, com $x=0:\ A=|cos\,0|+|sen\,0|=1+0=1$.)

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

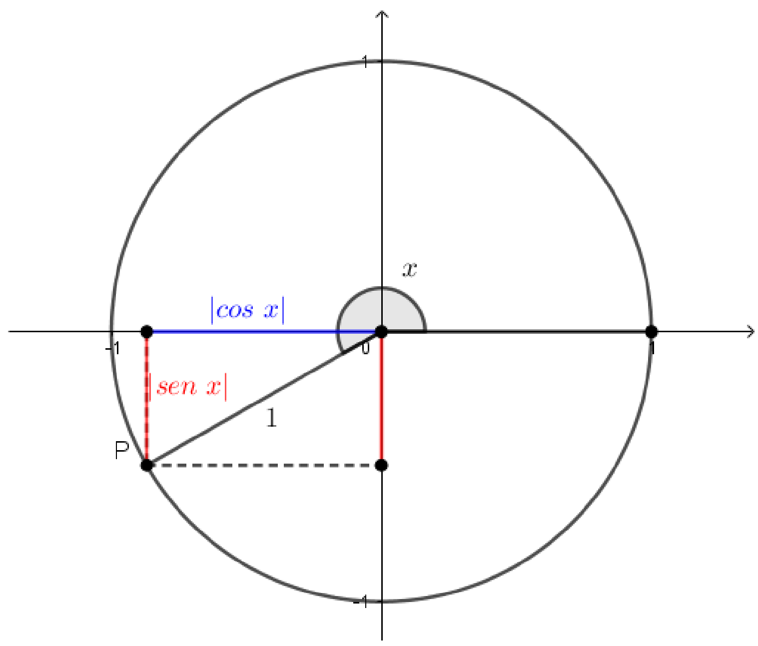
Solução 2

Considere o ciclo trigonométrico (círculo de raio unitário e centro na origem do plano cartesiano).

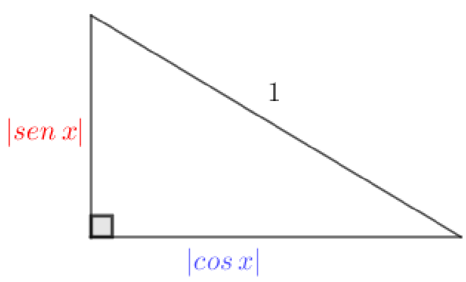
- Dado um valor real x, seja P o ponto encontrado sobre o ciclo trigonométrico quando percorremos este círculo a partir do ponto $(1,0)$ num comprimento x (sentido anti-horário se x é positivo e sentido horário se x é negativo).
  O ângulo central relativo ao arco percorrido será de x radianos, o cosseno de x será a abscissa do ponto P e, o seno de x, sua ordenada: $P=(cos\;x,sen\;x)$.



- Observe então que os segmentos azul e vermelho da figura medem $|cos\ x|, |sen\ x|$, respectivamente, porque uma medida é sempre não negativa.

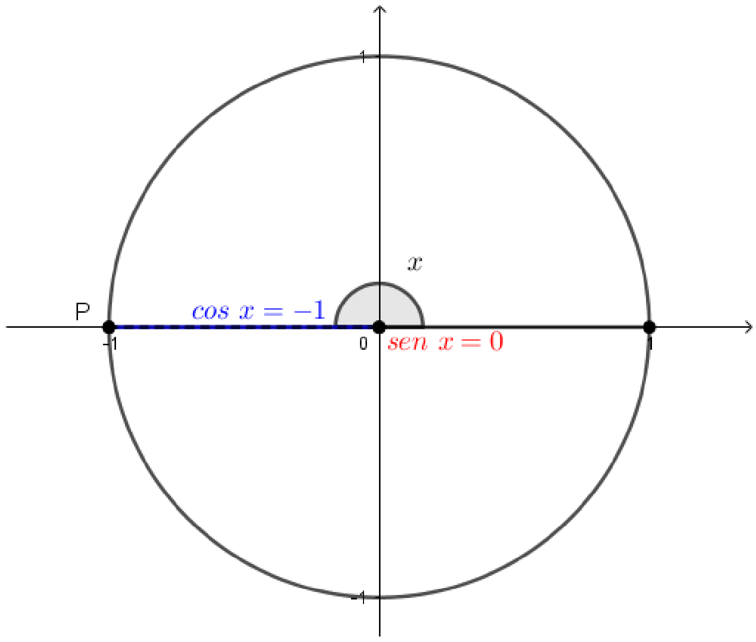


Assim, para a maior parte dos valores de x, temos um triângulo retângulo de catetos medindo $|cos\ x|$ e $|sen\ x|$ e hipotenusa medindo 1. Pela desigualdade triangular, temos $1 < |cos\,x| + |sen\,x| = A$ nestes casos.



$$\boxed{|cos\,x| + |sen\,x| > 1}$$

- Isto apenas não ocorre quando P está sobre algum eixo. Para esses casos, temos $|cos\ x| = 1$ e $|sen\ x| = 0$ ou $|sen\ x| = 1$ e $|cos\ x| = 0$, o que nos dá $A = 1$.



Portanto, o menor valor possível para A é 1.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.