.Problema para ajudar na escola: Qual o quociente?

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Sejam a e b números reais distintos tais que $a^2+b^2=6ab$.

Determine o valor do quociente $\dfrac{a+b}{a-b}$**.**

Solução

Sejam a e b dois números reais distintos que satisfazem a propriedade descrita no enunciado do problema:

$$\boxed{a^2+b^2=6ab}. \qquad (i)$$

Observe que como $a^2+b^2>0$, então $ab>0$; portanto a e b ou são ambos positivos ou são ambos negativos. (Note que ambos não podem ser iguais a zero, já que eles são distintos.)

De (i) segue que:

$$a^2+b^2+2ab=6ab+2ab$$
$$a^2+2ab+b^2=8ab$$
$$(a+b)^2=8ab.$$

Como $8ab>0$, podemos extrair a raiz quadrada de ambos os membros da última igualdade; com isso:

$$\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{8ab}$$
$$|a+b|=\sqrt{8ab}$$
$$a+b=\pm\sqrt{8ab}. \qquad (ii)$$

Utilizando, mais uma vez, a igualdade (i), segue que:

$$a^2+b^2-2ab=6ab-2ab$$
$$a^2-2ab+b^2=4ab$$
$$(a-b)^2=4ab.$$

Como $4ab>0$, podemos, também, extrair a raiz quadrada de ambos os membros da última igualdade e com isso:

$$\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{4ab}$$
$$|a-b|=\sqrt{4ab}$$
$$a-b=\pm\sqrt{4ab}. \qquad (iii)$$

Pronto, como $ab\neq 0$, por (ii) e (iii) temos que:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\pm\sqrt{8ab}}{\pm\sqrt{4ab}}$$
$$\frac{a+b}{a-b}=\pm\sqrt{\frac{8ab}{4ab}}$$
$$\frac{a+b}{a-b}=\pm\sqrt{2}$$

Portanto, temos dois valores possíveis para o quociente em questão: $\boxed{\dfrac{a+b}{a-b}=\sqrt{2}}$ ou $\boxed{\dfrac{a+b}{a-b}=-\sqrt{2}}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.