.Problema para ajudar na escola: Pares e ímpares

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

Separando todos os números naturais da sequência $1, 2, \ldots, 2010, 2011$ em dois conjuntos, um com todos os pares e outro com todos os ímpares, qual a diferença positiva entre as somas dos números desses dois conjuntos?

Para resolver este problema você pode precisar da soma

$$1+2+3+\cdots+t=\frac{(1+t)\cdot t}{2}.$$

Se você não se lembra dela, clique **AQUI**.

Solução 1

Observe que, ao separamos os pares e ímpares da sequência $1, 2, \ldots, 2010, 2011$ em dois conjuntos, ficamos com três somas de elementos:

- a soma de todos os elementos:
  $T = 1+2+3+\cdots+2010+2011;$
- a soma dos pares:
  $P = 2+4+6+\cdots+2008+2010;$
- a soma dos ímpares:
  $I = 1+3+5+\cdots+2009+2011.$

Utilizando a fórmula $\boxed{1+2+3+\cdots+t=\dfrac{(1+t)\cdot t}{2}}$, podemos obter T e P. Observe:

- $T = 1+2+3+\cdots+2010+2011 = \dfrac{2012\cdot 2011}{2} = 2023066\,;$
- $P = 2+4+6+\cdots+2008+2010 = 2(1+2+3+\cdots+1004+1005) = \dfrac{2\cdot 1006\cdot 1005}{2} = 1011030\,.$

Note, também, que

$$I-P=(T-P)-P=T-2P,$$

assim

$$|I-P|=|P-I|=|T-2P|$$

e a solução do problema é, portanto:

$$|2023066-2\cdot 1011030|=|2023066-2022060|=\boxed{1006}\,.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

O problema poderia também ser resolvido observando a tabela abaixo, na qual:

- I indica a sequência dos números ímpares do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2010, 2011\}$
- P indica a sequência dos números pares do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2010, 2011\}$
- D indica a diferença entre os dois números da coluna.

I	1	3	5	$\cdots$	2009	2011
P		2	4	$\cdots$	2008	2010
D	1	1	1	$\cdots$	1	1

Perceba que temos $\dfrac{2010}{2} = 1005$ números pares e, consequentemente, 1006 números ímpares. Para cada número par temos exatamente um ímpar uma unidade maior e temos ainda o número 1; portanto, a diferença positiva entre as somas dos números dos conjuntos $\{1, 3, \ldots, 2009, 2011\}$ e $\{2, 4, \ldots, 2008, 2010\}$ é $\boxed{1006}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.