.Problema para ajudar na escola: O quadro que Pedro ganhou

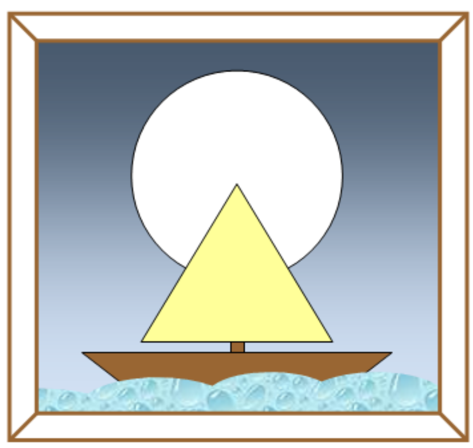
Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

(**OPM 2004 – adaptado**) O pescador Pedro gosta muito de pescar em noites de lua cheia e por isso sua amiga Maria pintou o quadro que aparece na imagem abaixo para presenteá-lo.

A vela do barco é um triângulo equilátero com $20\,cm$ de lado e a lua é um círculo com centro em um vértice do triângulo.

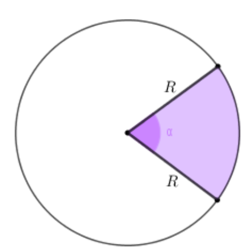
Se a área da parte da lua escondida atrás da vela é a metade da área da vela, qual é o raio da lua que Maria pintou?



Lembretes

Área de um setor circular de raio R e α graus:

$$\boxed{A_{setor} = \frac{\pi \cdot \alpha \cdot R^2}{360}}$$



(Para aprender um pouco mais sobre **setor circular**, cliquem **AQUI**)

Solução

Seja R a medida do raio a ser calculada.

Vamos inicialmente determinar a área da vela, já que a área da parte da lua escondida atrás da vela é a metade dessa área.

Como a vela é um triângulo equilátero, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para encontrar a altura do triângulo.

Sabemos que em um triângulo equilátero toda altura é também uma mediana; assim, se h for a altura da vela, segue que:

$h^2 + 10^2 = 20^2$

$h^2 = 300$

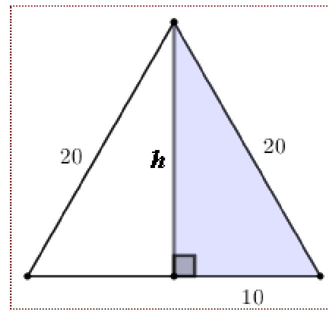
$\boxed{h = 10\sqrt{3}\,cm}$.

Dessa forma, temos que a área da vela é dada por:

$$A_v = \frac{base \times altura}{2}$$

$$A_v = \frac{20 \times 10\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{A_v = 100\sqrt{3}\,cm^2}.$$



A partir daqui podemos concluir a solução do problema de duas maneiras; vejamos.

(i) Se você sabe o que é um setor circular, observe que a parte da lua escondida é um setor circular e, portanto, podemos utilizar a fórmula do Lembrete: $A_{setor} = \dfrac{\pi \cdot \alpha \cdot R^2}{360}$.

Como a área da parte da lua escondida é a metade da área da vela, temos que $A_{setor} = \dfrac{A_v}{2}$ e, assim,

$$\boxed{\frac{\pi \cdot \alpha \cdot R^2}{360} = \frac{100\sqrt{3}}{2}}.$$

Por outro lado, note que o ângulo central que define o setor circular é um ângulo interno de um triângulo equilátero, logo:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

e, portanto, segue que:

$$\frac{\pi \cdot 60 \cdot R^2}{360} = \frac{100\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi \cdot R^2}{6} = 50\sqrt{3}$$

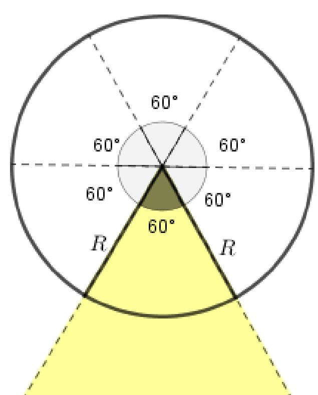
$$R^2 = \frac{300\sqrt{3}}{\pi}$$

$$R = \sqrt{\frac{300\sqrt{3}}{\pi}}.$$

Pelo exposto, temos que a medida do raio da lua pintada por Maria é $\boxed{R = 10\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}} \approx 12,86\ cm}$.

(ii) Se você não sabe o que é um setor circular, podemos resolver o problema sem a fórmula do Lembrete.

Para isso basta observar que, como a medida de cada ângulo interno de um triângulo equilátero, e particularmente da vela, é $\alpha = \dfrac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ e $60^\circ = \dfrac{360^\circ}{6}$, então a área da parte da lua que está escondida atrás da vela é um sexto da área total do círculo cuja medida R do raio queremos determinar.



Como a área da parte da lua escondida é a metade da área da vela, a qual já sabemos ser $A_v = 100\sqrt{3}\,cm^2$, temos que $\dfrac{100\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi \cdot R^2}{6}$, donde segue que:

$$300\sqrt{3} = \pi \cdot R^2$$

$$R^2 = \frac{300\sqrt{3}}{\pi}$$

$$R = \sqrt{\frac{300\sqrt{3}}{\pi}}.$$

Assim, a medida do raio da lua pintada por Maria é $\boxed{R = 10\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}} \approx 12,86\ cm}$.

Soluções elaboradas pelos **Moderadores do Blog**.