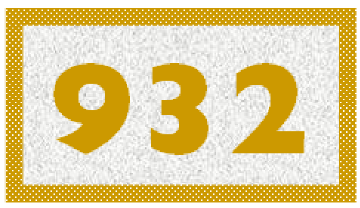
.Problema para ajudar na escola: O número lá de casa

Problema

(A partir do 8º ano do E. F.) (Nível: Difícil)

O número lá de casa é 932.



Observe que este número tem as seguintes propriedades:

- todos os algarismos são não nulos e aparecem em ordem decrescente;
- a soma de 932 com o número que se obtém invertendo a ordem dos seus algarismos é um número cujos algarismos são todos ímpares ($932+239=1171$).

Quantos números de três algarismos, incluindo o 932, têm estas duas propriedades?

Solução

Sejam n um número com as propriedades exigidas no problema e a , b e c os algarismos das centenas, dezenas e unidades, respectivamente, de n :

- $\boxed{n=abc}$. (Aqui, as notações abc e cba não indicarão produtos e sim representações de números com três algarismos no sistema decimal.)

Os algarismos são não nulos e aparecem em ordem decrescente, logo:

- $a>b>c>0\,.\qquad (i)$

A soma $\boxed{abc+cba}$ tem todos os algarismos ímpares; assim, o algarismo de unidade dessa soma deve ser ímpar.

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ + & c & b & a \\ \hline \end{array}$$

- $a+c$ é ímpar. $\qquad (ii)$

Note que $b+b=2\cdot b$, ou seja $b+b$ é um número par. Como $abc+cba$ tem todos os algarismos ímpares, o algarismo das dezenas da soma $\boxed{abc+cba}$ deve ser ímpar, então:

- $a+c>10\,.\qquad (iii)$

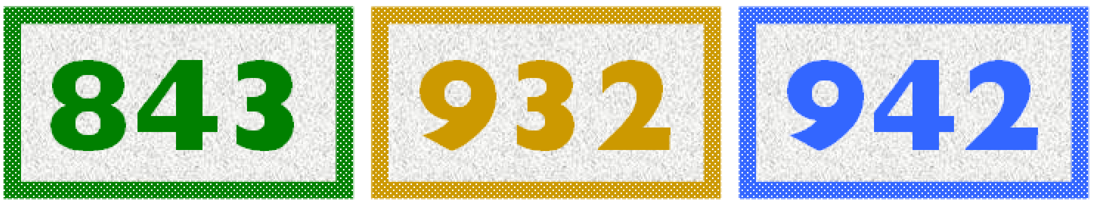
Para obtermos o algarismo das dezenas de $\boxed{abc+cba}$ vamos, então, efetuar a soma $b+b+1$; mas observe agora que, se tivermos $b+b+1\geq 10$, então o algarismo das centenas da soma $abc+cba$ será $a+c+1$. No entanto, sabemos que $a+c$ é o algarismo das unidades da soma $\boxed{abc+cba}$, logo é ímpar, e dessa forma $a+c+1$ seria par, o que não é possível pois a soma $\boxed{abc+cba}$ tem todos os algarismos ímpares. Portanto

- $b+b+1<10\,.\qquad (iv)$

De (iv), segue que $2 \cdot b < 9$, ou seja, $b \leq 4$. Analisemos, então, cada uma das possibilidades de valores para o algarismo b.

- Se $b = 4$, então, por (i), $a > 4$ e $c < 4$.
Sabemos, por (ii) e por (iii), que $a + c$ é ímpar e maior do que dez; assim, para as possibilidades $c = 1,\ 2,\ 3$ e $a = 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$, obtemos as soluções $\boxed{n = 843}$ e $\boxed{n = 942}$.
- Se $b = 3$, então, por (i), $a > 3$ e $c < 3$.
Para as possibilidades $c = 1,\ 2$ e $a = 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$, observamos, mais uma vez, que $a + c$ é ímpar e maior do que dez, logo obtemos uma única solução: $\boxed{n = 932}$.
- Se $b = 2$, então, por (i), a única possibilidade para o algarismo c seria $c = 1$ e, nesse caso, não existiria um algarismo a tal que $a + c > 10$, já que o maior valor para a soma $a + c$ seria $a + c = 10$.
- Para $b = 1$ não temos valor para o algarismo c de forma que $b = 1 > c > 0$.

Pelo exposto, as únicas opções para n são:



Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Se for conveniente, você pode obter um arquivo desta página em PDF. Mas, para abrir esse arquivo, é necessário que você tenha o ***Adobe Acrobat Reader*** instalado no dispositivo que você está utilizando. Caso não tenha, é só clicar **AQUI** para fazer o download.
Se o seu dispositivo já tem o ***Adobe Acrobat Reader*** instalado, basta copiar o arquivo abaixo e abri-lo sempre que quiser!

Arquivo