.Problema para ajudar na escola: O maior valor

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Sejam m e n números naturais tais que $19 \leq m \leq 49$ e $51 \leq n \leq 101$.

Qual é o maior valor possível para a expressão $\dfrac{m+n}{n-m}$?

Ajuda

A melhor ajuda que podemos dar a você não é apresentar dicas sobre o que fazer, mas lembrar

O QUE NÃO PODEMOS FAZER COM DESIGUALDADES ...

- **NÃO SUBTRAIAM DESIGUALDADES DIRETAMENTE !**
- **NÃO DIVIDAM DESIGUALDADES DIRETAMENTE !**

Solução

A princípio, podemos observar que:

- quanto maior o numerador de uma fração positiva, maior ela será;
- quanto menor o denominador de uma fração positiva, maior ela será.

Assim, estamos procurando números naturais m e n, nas condições do problema, tais que a soma $m+n$ seja a maior possível e a diferença $n-m$ seja a menor possível.

Dessa forma, vale também observar que:

- quanto maiores forem os valores de m e n, maior será a soma $m+n$;
- quanto maior for o valor de m e menor o de n, menor será a diferença $n-m$.

A partir dessas observações, concluímos que a escolha para m do maior valor que esse número pode assumir aponta para a obtenção do maior valor para a fração $\dfrac{m+n}{n-m}$. No entanto, a escolha para o valor de n é conflitante: enquanto o **maior** valor de n maximiza o numerador, é a escolha do **menor** que minimiza o denominador.

Observe que se já fixássemos o maior valor para m, $m=49$, e testássemos os dois valores extremos para n, $n=51$ e $n=101$, observaríamos que o primeiro valor seria mais adequado:

- $\dfrac{49+51}{51-49}=\dfrac{100}{2}=50$
- $\dfrac{49+101}{101-49}=\dfrac{150}{52}\approx 2,9.$

Mas essa não seria uma justificativa adequada, não é? Para uma justificativa, digamos, matemática, podemos procurar uma maneira de reescrever a fração $\dfrac{m+n}{n-m}$ de modo que o seu maior valor não dependa de testes numéricos. Para isso, observe que:

$$
\begin{aligned}
\boxed{\frac{m+n}{n-m}} &= \frac{m+n+m-m}{n-m} \\
&= \frac{(n-m)+2m}{n-m} \\
&= \frac{n-m}{n-m} + \frac{2m}{n-m} \\
&= \boxed{1 + \frac{2m}{n-m}}.
\end{aligned}
$$

Perceba que a fração $\dfrac{m+n}{n-m}$ será maior quando a fração $\dfrac{2m}{n-m}$ for maior, e esta fração será maior quando m assumir o maior valor possível e n o menor valor.

Agora sim, temos uma justificativa adequada para nossa escolha: $m = 49$ e $n = 51$.

Dessa forma, o maior valor possível para a expressão $\dfrac{m+n}{n-m}$ é $\boxed{\dfrac{49+51}{51-49} = \dfrac{100}{2} = 50}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.