.Problema para ajudar na escola: O maior retângulo!

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Seja q um número real positivo.
Dentre todos os retângulos de perímetro $2q$, determine aquele que tem área máxima!

Lembretes

(1) O gráfico de uma função quadrática $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dada por $h(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, é uma parábola com diretriz paralela ao eixo OX, sendo sua concavidade voltada para cima se $a>0$ e voltada para baixo se $a<0$.

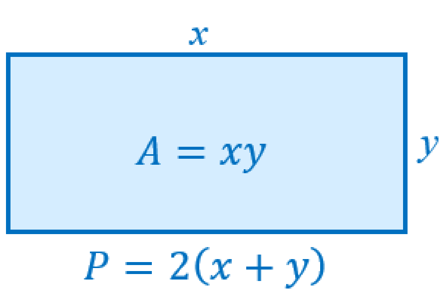
(2) Se $\Delta=b^2-4ac$, as coordenadas do vértice da parábola são dadas por $(x_v,y_v)=\left(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, sendo que $x_v=\dfrac{-b}{2a}$ e $y_v=\dfrac{-\Delta}{4a}$ indicam, respectivamente:

✓ o ponto de mínimo e o valor mínimo da função h, se a concavidade estiver voltada para cima;
✓ o ponto de máximo e o valor máximo da função h, se a concavidade estiver voltada para baixo.

Solução

Vamos considerar um retângulo genérico cujos lados tenham comprimentos x e y.
Assim, a área A e o perímetro P desse retângulo serão dados por:

- $A=xy$
- $P=x+y+x+y=2x+2y=2\,(x+y)\,.$



Neste problema, vamos considerar todos os retângulos cujos perímetros sejam $2q$, com q um número real positivo fixo. Assim, teremos que:

$$P=2\,(x+y)$$
$$\cancel{2}\,q=\cancel{2}\,(x+y)$$
$$q=x+y$$
$$y=q-x.$$

Observe que o comprimento y é função de x, já que q é constante. Dessa forma, como $A=xy$, segue que:

$$A=x\,(q-x)$$

$$A = qx - x^2$$

e A é também função de x.

Vamos interpretar geometricamente os cálculos algébricos que fizemos até aqui:

- Temos uma família de retângulos cujas respectivas áreas podem ser escritas em função do comprimento x de um de seus lados como $A = qx - x^2$, sendo q um número real positivo fixo, ou seja, uma constante positiva.

Assim, voltando à Álgebra, fixado um número q, $q > 0$, a cada retângulo cujos lados têm comprimentos x e $q - x$ associamos de maneira única um número A dado por $A = qx - x^2$. Temos então uma função f assim definida:

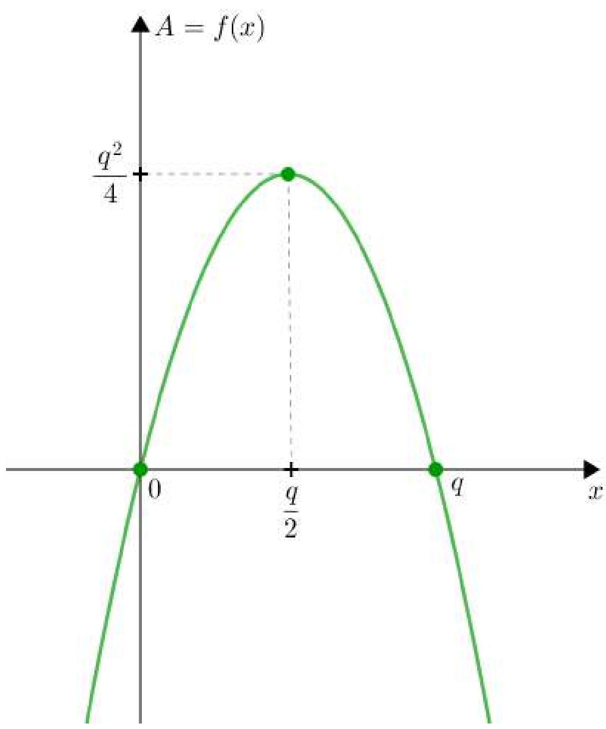
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -x^2 + qx \end{aligned}$$

A geometria do nosso problema indica que, dentre todos os retângulos de perímetro $2q$, determinemos aquele que tem área máxima. De acordo com os nossos **Lembretes**, o gráfico da nossa função f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo; assim, vamos determinar o valor máximo que essa função f assume. Ainda segundo nossos **Lembretes**, a primeira e a segunda coordenadas do vértice da parábola são, respectivamente, o ponto de máximo e o valor máximo da função f:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-q}{-2} = \frac{q}{2}.$$

$$A_v = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{\left(q^2 - 0\right)}{-4} = \frac{q^2}{4}$$

Assim, a área máxima é $\dfrac{q^2}{4}$ e essa área é relativa ao retângulo cujo comprimento x do lado é $x = \dfrac{q}{2}$.



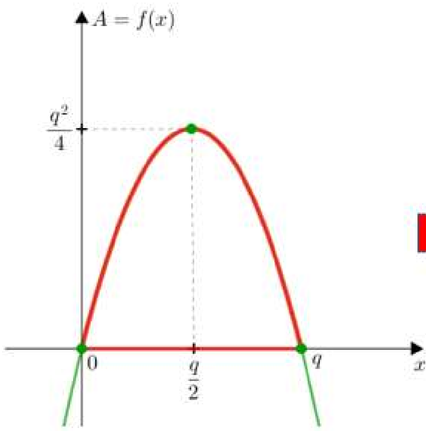
Como o segundo comprimento do retângulo é $y = q - x$, segue que $y = q - \dfrac{q}{2} = \dfrac{q}{2}$.

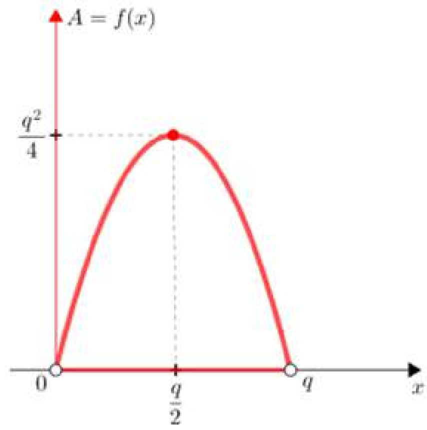
Portanto, **fixadas as unidades de comprimento e de área, dentre todos os retângulos de perímetro $2q$, aquele que tem área máxima é o quadrado de lados com comprimento $\dfrac{q}{2}$ e essa área máxima é $\dfrac{q^2}{4}$.**

Analisando mais detalhadamente a geometria do problema, observamos que nem necessitaríamos da função f definida em todo o seu domínio e o seu contradomínio.

Perceba que $\boxed{x}$ é o comprimento de um dos lados de um suposto triângulo de perímetro $2q$ e a esse x associamos o número real positivo $\boxed{qx - x^2}$, ou seja, temos que $\boxed{x \in \mathbb{R}_+^*}$ e $\boxed{qx - x^2 \in \mathbb{R}_+^*}$. Mais do que isso, perceba também que, como $x > 0$, então $x < 2x < P = q$.

Dessa forma, temos de fato $\boxed{0 < x < q}$ e $\boxed{f(x) = qx - x^2 \in \mathbb{R}_+^*}$ e podemos considerar a função f restrita a esses valores. (Estamos indicando por $\mathbb{R}_+^*$ o conjunto dos números reais positivos, ou seja, o intervalo $]0\,,\,+\infty[\,.$)





Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.