.Problema para ajudar na escola: O desenho da Aline

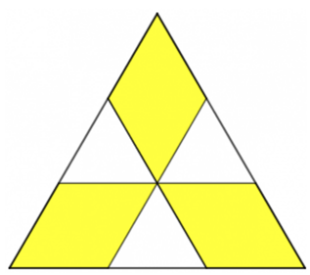
Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

A partir de um grande triângulo equilátero com área de $9\,cm^2$, Aline fez o desenho mostrado na figura.

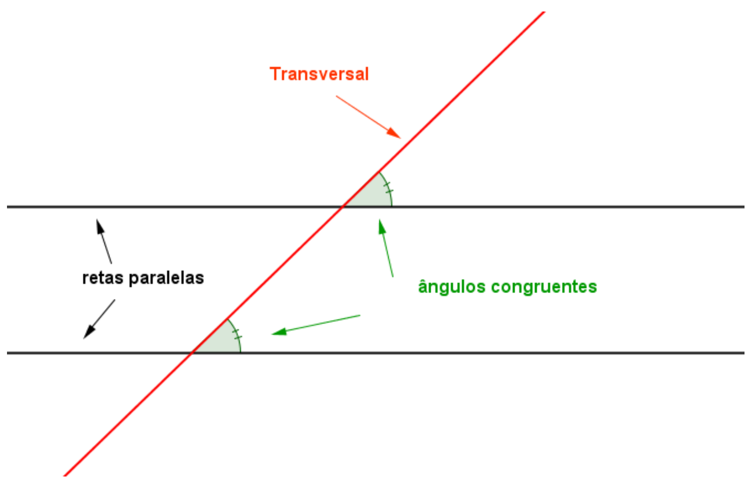
Os segmentos de reta internos que ela desenhou são paralelos aos lados do triângulo maior e dividem cada um desses lados em três partes iguais.

Qual a área da parte colorida de amarelo?



Ferramentas que podem ajudar

Propriedade 1: Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam ângulos correspondentes congruentes.



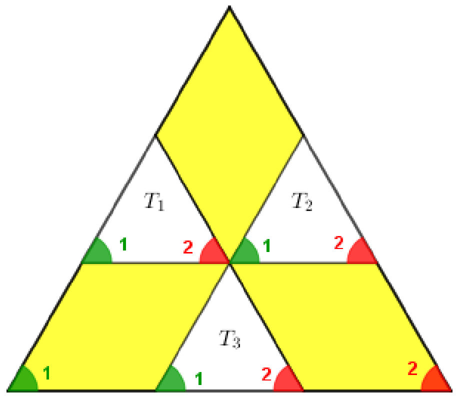
Reta transversal a outras retas é uma reta que intersecta essas outras retas em pontos diferentes.

Propriedade 2: **Caso de Semelhança A.A.** (ângulo – ângulo): Se dois ângulos de um triângulo são congruentes a dois ângulos de outro triângulo, então estes triângulos são semelhantes.

Propriedade 3: A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é o quadrado da razão de semelhança.

Solução 1

Observe a figura abaixo.



- Perceba que, por múltiplas aplicações da **Propriedade 1**, podemos concluir que todos os ângulos indicados por **1** têm a mesma medida, assim como os indicados com **2**.

Essa observação sobre a congruência dos ângulos destacados na figura nos dá uma primeira informação importante para resolvermos o problema:

- **pela Propriedade 2, os triângulos T_1 , T_2 , T_3 e o original são semelhantes.**

(Na verdade, como o triângulo original é equilátero, todas as medidas dos ângulos desses quatro triângulos são iguais, ou seja, os ângulos indicados por **1** e por **2** são congruentes.)

Como os lados do triângulo maior foram divididos em três partes iguais, a razão de semelhança entre o triângulo maior e cada um dos triângulos T_1 , T_2 e T_3 é 3. Assim, pela Propriedade 3, a área do triângulo maior é nove vezes maior do que a área de cada um desses triângulos pequenos.

Dessa forma, T_1 , T_2 e T_3 têm área $\boxed{\dfrac{9}{9}=1\,cm^2}$ cada um.

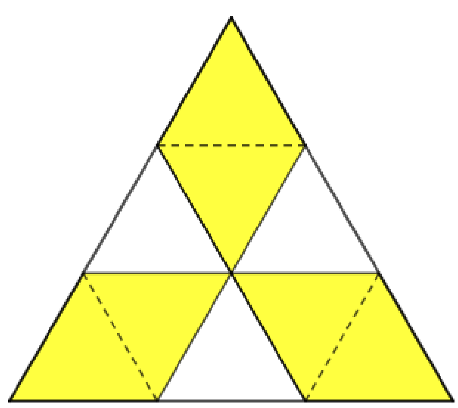
Por outro lado, observe que a área da região colorida de amarelo é a área do triângulo externo menos a área desses triângulos. Assim, a área da região colorida de amarelo, A_a , é dada por:

$$A_a = 9 - 3\times 1 = 9 - 3 = \boxed{6\,cm^2}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Observe que os segmentos tracejados definem nove triângulos internos ao triângulo maior da figura original.



- Perceba que as alturas dos triângulos menores têm o mesmo comprimento, pois estão em perpendiculares a retas paralelas que se encontram a uma mesma distância, já que os lados do triângulo maior foram divididos em partes com o mesmo comprimento.
- As bases dos triângulos menores têm o mesmo comprimento, pois estão em retas paralelas e são limitadas por outras paralelas que se encontram a uma mesma distância.

Assim, os nove triângulos internos ao triângulo maior têm a mesma área e, portanto, cada um tem área de $\dfrac{9}{9}=1\,cm^2$.

Finalizando, a parte colorida de amarelo é formada por seis desses triângulos internos; assim, sua área é dada por:

$$A_a = 6\times 1 = \boxed{6\,cm^2}.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.