



.Problema para ajudar na escola: Número perfeito multiplicativo



Problema

(A partir do 7º ano do E. F.)

Um número natural não nulo n é dito **perfeito multiplicativo** se o produto dos seus divisores naturais for igual a n^2 .

Determinar os dez primeiros números naturais perfeitos multiplicativos.



Para aprender um pouco mais. . .

Duas propriedades sobre números perfeitos multiplicativos:

(1) Se n for da forma $n = p \cdot q$, com p e q primos distintos e positivos, então n será um número perfeito multiplicativo.

Justificativa

(2) Nenhum primo é perfeito multiplicativo.

Justificativa

Solução

Respondendo à pergunta, os dez primeiros números naturais perfeitos multiplicativos são:

1, 6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27.

É claro que poderíamos obter essa resposta encontrando, sequencialmente, para cada número todos os seus divisores, fazendo o produto dos divisores encontrados, até obtermos esses dez números, e utilizar argumentos como:

- 4 não é um número perfeito multiplicativo, já que seus divisores naturais são **1, 2, 4** e $1 \times 2 \times 4 = 8 \neq 16 = 4^2$.
- 6 é um número perfeito multiplicativo, pois os divisores naturais de 6 são **1, 2, 3, 6** e $1 \times 2 \times 3 \times 6 = 36 = 6^2$.

Mas podemos utilizar as duas propriedades apresentadas acima quando possível. Será muito mais rápido; observe.

- O único divisor natural de 1 é 1 e $1 = (1)^2$. Logo 1 é perfeito multiplicativo.
- 2 é primo; logo, por (2), 2 não é perfeito multiplicativo.
- 3 é primo; logo, por (2), 3 não é perfeito multiplicativo.
- 4 não é um número perfeito multiplicativo, já que seus divisores são **1, 2, 4** e $1 \times 2 \times 4 = 8 \neq 16 = 4^2$.
- 5 é primo; logo, por (2), 5 não é perfeito multiplicativo.

- $6 = 2 \times 3$, com 2 e 3 primos; logo, por (1), 6 é perfeito multiplicativo.
- 7 é primo; logo, por (2), 7 não é perfeito multiplicativo.
- 8 é perfeito multiplicativo; pois os divisores naturais de 8 são $\boxed{1, 2, 4, 8}$ e $1 \times 2 \times 4 \times 8 = 64 = 8^2$.
- 9 não é um número perfeito multiplicativo, já que seus divisores são $\boxed{1, 3, 9}$ e $1 \times 3 \times 9 = 27 \neq 81 = 9^2$.
- $10 = 2 \times 5$, com 2 e 5 primos; logo, por (1), 10 é perfeito multiplicativo.
- 11 é primo; logo, por (2), 11 não é perfeito multiplicativo.
- 12 não é um número perfeito multiplicativo, já que seus divisores são $\boxed{1, 2, 3, 4, 6, 12}$ e $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 12 = 1728 \neq 144 = 12^2$.
- 13 é primo; logo, por (2), 13 não é perfeito multiplicativo.
- $14 = 2 \times 7$, com 2 e 7 primos; logo, por (1), 14 é perfeito multiplicativo.
- $15 = 3 \times 5$, com 3 e 5 primos; logo, por (1), 15 é perfeito multiplicativo.
- 16 não é um número perfeito multiplicativo, uma vez que seus divisores são $\boxed{1, 2, 4, 8, 16}$ e $1 \times 2 \times 4 \times 8 \times 16 = 1024 \neq 256 = 16^2$.
- 17 é primo; logo, por (2), 17 não é perfeito multiplicativo.
- 18 não é um número perfeito multiplicativo, uma vez que seus divisores são $\boxed{1, 2, 3, 6, 9, 18}$ e $1 \times 2 \times 3 \times 6 \times 9 \times 18 = 5832 \neq 324 = 18^2$.
- 19 é primo; logo, por (2), 19 não é perfeito multiplicativo.
- 20 não é um número perfeito multiplicativo, uma vez que seus divisores são $\boxed{1, 2, 4, 5, 10, 20}$ e $1 \times 2 \times 4 \times 5 \times 10 \times 20 = 8000 \neq 400 = 20^2$.
- $21 = 3 \times 7$, com 3 e 7 primos; logo, por (1), 21 é perfeito multiplicativo.
- $22 = 2 \times 11$, com 2 e 11 primos; logo, por (1), 22 é perfeito multiplicativo.
- 23 é primo; logo, por (2), 23 não é perfeito multiplicativo.
- 24 não é um número perfeito multiplicativo, uma vez que seus divisores são $\boxed{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}$ e $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 6 \times 8 \times 12 \times 24 = 331776 \neq 576 = 24^2$.
- 25 não é um número perfeito multiplicativo, já que seus divisores são $\boxed{1, 5, 25}$ e $1 \times 5 \times 25 = 125 \neq 625 = 25^2$.
- $26 = 2 \times 13$, com 2 e 13 primos; logo, por (1), 26 é perfeito multiplicativo.
- 27 é perfeito multiplicativo; pois os divisores naturais de 27 são $\boxed{1, 3, 9, 27}$ e $1 \times 3 \times 9 \times 27 = 729 = 27^2$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.