.Problema para ajudar na escola: Mais uma área alaranjada

Problema

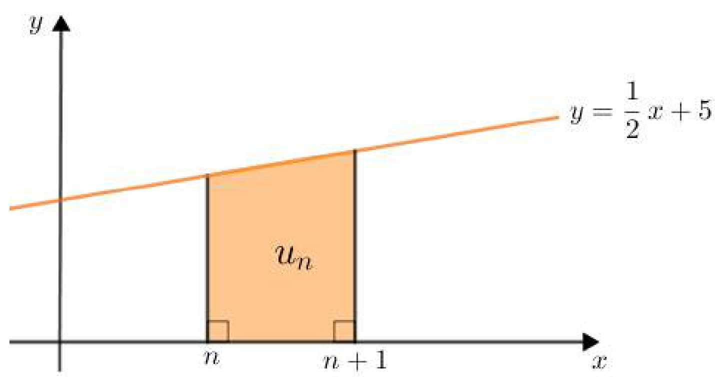
(A partir da 2ª série do E. M.)

Na figura, para cada número natural n, u_n é a área colorida abaixo da reta definida por $y=\frac{1}{2}x+5$.

(a) Calcule u_n, em função de n.

(b) Determine u_0 e interprete geometricamente a região que tem essa área.

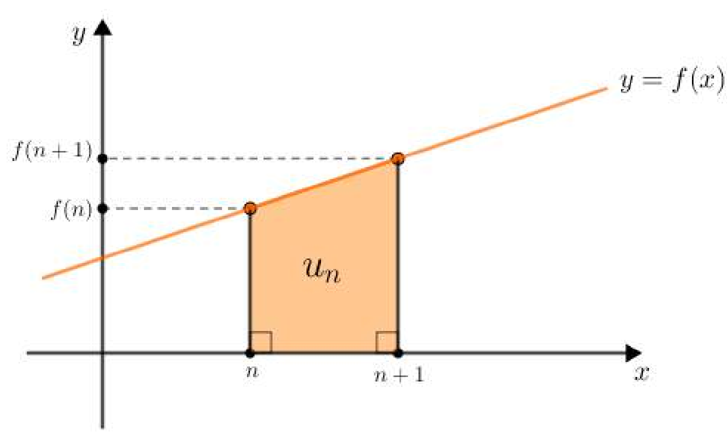
(c) A sequência $\{u_0,\, u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n\, \cdots\}$ é uma **PG**? É uma **PA**?



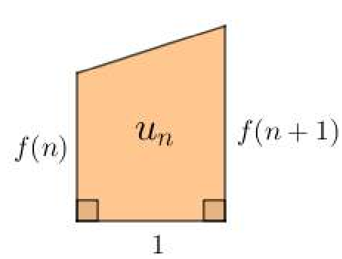
Solução

(a) Seja n um número natural.

Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\frac{1}{2}x+5$, cujo gráfico é a reta $y=\frac{1}{2}x+5$ destacada na figura mostrada no enunciado.



Dessa forma, fixadas uma unidade de comprimento e uma unidade de área, temos que u_n é a área de um trapézio retângulo de altura 1 e cujos comprimentos das bases menor e maior são, respectivamente, $f(n)$ e $f(n+1)$.



Com isso, sabendo que $f(x)=\frac{1}{2}x+5=\dfrac{x+10}{2}$, segue que:

$$u_n=\frac{(\text{base maior}+\text{base menor})\times\text{altura}}{2}$$

$$u_n = \frac{(f(n+1)+f(n))\times 1}{2}$$

$$u_n = \frac{f(n+1)+f(n)}{2}$$

$$u_n = \frac{\frac{(n+1)+10}{2}+\frac{n+10}{2}}{2}$$

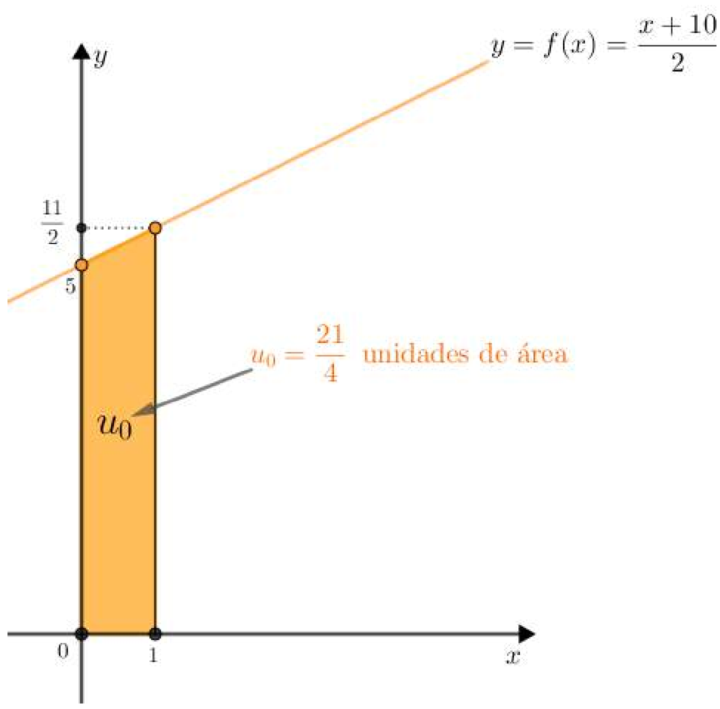
$$u_n = \frac{n+1+10+n+10}{4}$$

$$u_n = \frac{2n+21}{4} \text{ unidades de área.}$$

Portanto, para um número natural n, temos que $\boxed{u_n = \frac{2n+21}{4}}$.

(b) Para $n=0$, temos que $u_0 = \frac{0+21}{4}$ e, assim, $\boxed{u_0 = \frac{21}{4}}$ unidades de área.

Essa é a área do trapézio retângulo de altura 1 e cujos comprimentos das bases menor e maior são, respectivamente, $f(0)=5$ e $f(1)=\frac{11}{2}$. Conforme mostrado na figura a seguir, esse trapézio fica perfeitamente definido pela reta dada pela equação $y=\frac{1}{2}x+5$, pelo eixo x, pelo eixo y e pela reta dada pela equação $y=1$.



(c) Vamos observar a sequência $\{u_0;\, u_1;\, u_2;\, \cdots;\, u_n;\, u_{n+1};\, \cdots\}$:

$$\{u_0 = \frac{21}{4};\, u_1 = \frac{23}{4};\, u_2 = \frac{25}{4};\, \cdots;\, u_n = \frac{2n+21}{4};\, u_{n+1} = \frac{2n+23}{4};\cdots\}.$$

Perceba que:

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2n+23}{4}}{\frac{2n+21}{4}} = \frac{2n+23}{2n+21}$
- $u_{n+1}-u_n = \frac{2n+23}{4} - \frac{2n+21}{4} = \frac{2n+23-2n-21}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

Assim,

- como $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ não é uma constante (a razão depende de n), então a sequência $\{u_0;\, u_1;\, u_2;\, \cdots;\, u_n;\, u_{n+1};\, \cdots\}$ **não é uma Progressão Geométrica**.
- como $u_{n+1}-u_n$ é uma constante, então a sequência $\{u_0;\, u_1;\, u_2;\, \cdots;\, u_n;\, u_{n+1};\, \cdots\}$ **é uma Progressão Aritmética**.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.