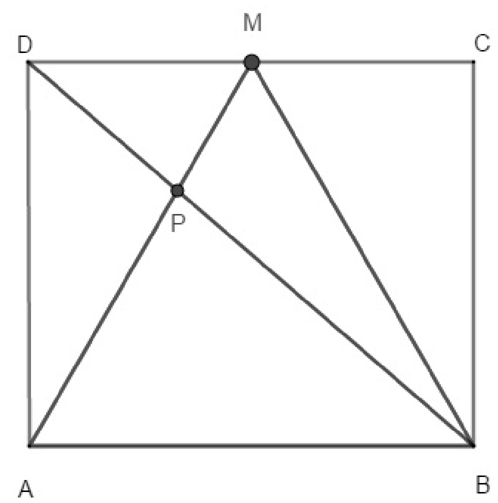
.Problema: Encontre a medida do segmento

Problema

(Coleção **Fundamentos de Matemática Elementar**– Volume 9) Na figura, $ABCD$ é um retângulo, M é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e o triângulo ABM é equilátero. Sabendo que a medida de $\overline{AB}$ é 15, calcule a medida de $\overline{AP}$.



Lembretes

(1) As três medianas de um triângulo interceptam-se em um mesmo ponto (Baricentro) que divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

(2) As diagonais de um retângulo intersectam-se mutuamente ao meio.

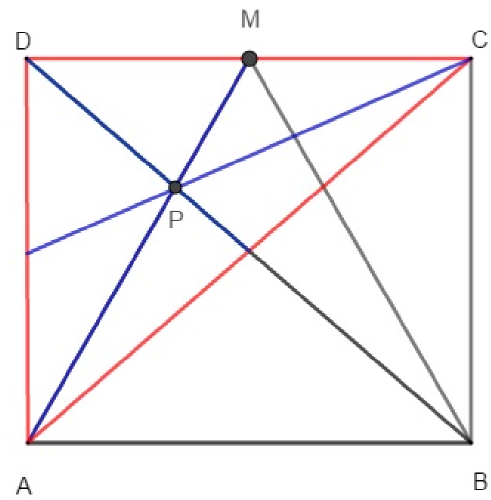
Notação: Denotaremos o segmento definido por dois pontos, digamos X e Y, por $\overline{XY}$ e o seu comprimento por XY.

Solução 1

Como o triângulo ABM é equilátero temos que $AM = 15$. Agora, considerando o triângulo ACD, vamos observar as suas três medianas.

- Como M é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, temos que $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao vértice A.
- Como $ABCD$ é um retângulo, pelo **Lembrete 2** temos que o segmento $\overline{DB}$ contém a mediana que liga o vértice D ao ponto médio do lado $\overline{AC}$.
- Vamos traçar a terceira mediana, que liga o vértice C ao ponto médio do lado $\overline{AD}$. (Rigorosamente, não há necessidade de se traçar a terceira mediana para obtermos o baricentro de um triângulo: bastam duas medianas. Mas vamos fazê-lo para um melhor entendimento desta solução.)

Vejam a figura abaixo e observem que o ponto P é exatamente o **Baricentro** do triângulo ACD.



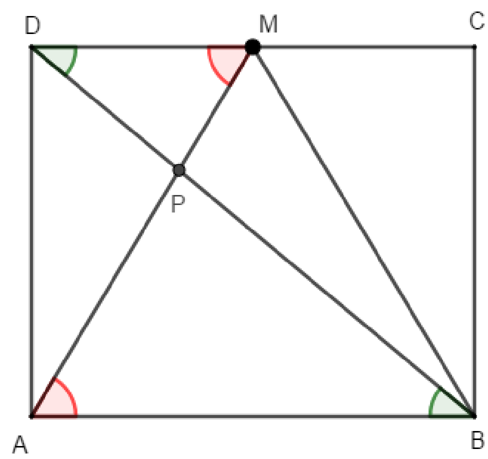
Pelo **Lembrete 1**, se $PM = x$, temos que $AP = 2x$. Assim, $2x + x = 15$ e, com isso, $x = 5$.

Portanto, $AP = 2x = 2 \cdot 5 = 10$, ou seja, a medida do segmento $\overline{AP}$ é $\boxed{10}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

Faremos uma segunda solução utilizando semelhança de triângulos. Para isso, observe os ângulos destacados na próxima figura.



Vemos que os ângulos de mesma cor são congruentes por serem ângulos alternos internos.

(Precisa relembrar esse conceito? Dê uma passadinha **nesta Sala**.)

Com isso, pelo caso de semelhança de triângulos **ângulo-ângulo**, temos que os triângulos PMD e PAB são semelhantes. Assim:

$$\boxed{\frac{DM}{AB} = \frac{PM}{AP}}. \qquad (i)$$

(Para saber mais sobre semelhança de triângulos, visite **esta Sala para Leitura** .)

Como $DC = AB = 15$ e M é o ponto médio de $\overline{DC}$, temos que $DM = \dfrac{15}{2}$. Então, segue de (i) que:

$$\frac{\frac{15}{2}}{15} = \frac{PM}{AP}$$

$$\frac{15}{2} \times AP = 15 \times PM$$

$$AP = 2 \times PM. \qquad (ii)$$

Por outro lado, temos que $AM = AP + PM$; assim,

$$AM = 2PM + PM = 3PM.$$

Sendo $AM = 15$, então $15 = 3PM$ e, portanto, $PM = 5$.

Logo, por (ii), $\boxed{AP = 10}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.