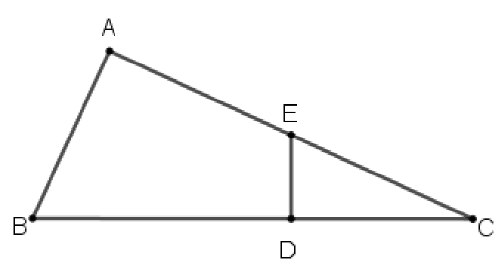
.Problema para ajudar na escola: Dois triângulos

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

(**OPM** – 2005) Os triângulos ABC e EDC mostrados na figura são retângulos, com ângulos retos em $\hat{A}$ e $\hat{D}$, respectivamente.
Justifique a afirmação abaixo.

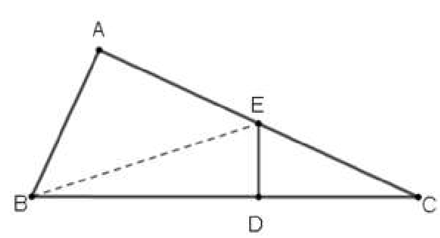


Afirmação: Se E é o ponto médio de $\overline{AC}$, então o comprimento do segmento $\overline{BA}$ é menor que o comprimento do segmento $\overline{BD}$.

Notação: Denotaremos o segmento definido por dois pontos, digamos X e Y, por $\overline{XY}$ e o seu comprimento por XY.

Solução 1

Na figura ao lado, suponha que E seja o ponto médio do segmento $\overline{AC}$.



Aplicando o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos BDE e ABE obtemos as igualdades $BE^2 = BA^2 + AE^2$ e $BE^2 = BD^2 + DE^2$, donde concluímos que:

$$\boxed{BA^2 + AE^2 = BD^2 + DE^2}. \quad (i)$$

Como E é o ponto médio de $\overline{AC}$, $AE = EC$; logo, segue de (i) que:

$$BA^2 + EC^2 = BD^2 + DE^2,$$

ou ainda:

$$\boxed{BA^2 - BD^2 = DE^2 - EC^2}. \quad (ii)$$

Agora, aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo EDC, obtemos $\boxed{EC^2 = CD^2 + DE^2}$, donde concluímos que $\boxed{EC^2 > DE^2}$, já que $CD^2 > 0$, pois CD é o comprimento do lado de um triângulo. Portanto:

$$\boxed{DE^2 - EC^2 < 0}. \quad (iii)$$

Assim,

$$BA^2 - BD^2 \overset{(ii)}{=} DE^2 - EC^2 \overset{(iii)}{<} 0$$

e, então, $BA^2 - BD^2 < 0$. Com isso:

$$(BA + BD) \cdot (BA - BD) < 0 . \quad (iv)$$

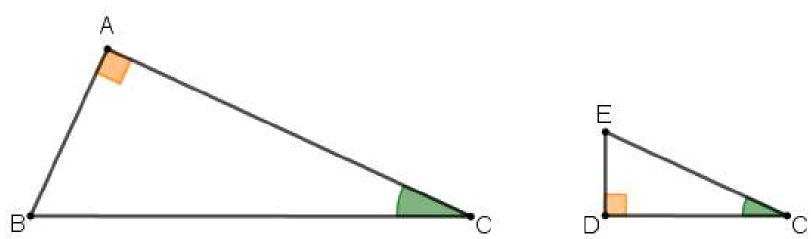
Mas observe que BA e BD são comprimentos de lados de triângulos; assim, $BA + BD > 0$. Logo, segue de (iv), que $\boxed{BA - BD < 0}$ e, finalmente podemos concluir que $\boxed{BA < BD}$.

Dessa forma, o comprimento do segmento $\overline{BA}$ é de fato menor que o comprimento do segmento $\overline{BD}$, se E for o ponto médio do segmento $\overline{AC}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Solução 2

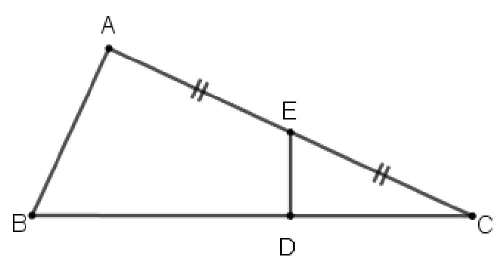
Na figura abaixo, vemos em destaque os triângulos ABC e DEC da figura inicial do problema



Perceba que, como os ângulos com vértices nos pontos A e D são ângulos retos e o ângulo com vértice em C é comum aos dois triângulos, então ABC e DEC são triângulos semelhantes e, portanto,

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AB}{ED} = \frac{AC}{DC} .$$

No entanto, sabemos que E é o ponto médio do segmento $\overline{AC}$; assim, $AC = 2EC$; logo, podemos reescrever essas igualdades da seguinte forma:



$$\frac{BC}{EC} = \frac{AB}{ED} = \frac{2EC}{DC} .$$

Com isso, segue que:

$$2\,EC^2 = BC \times DC$$

$$2\,EC^2 = (BD + DC) \times DC$$

$$2\,EC^2 = BD \times DC + DC^2 . \quad (i)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC, obtemos $BC^2 = BA^2 + AC^2$, donde:

$$BA^2 = BC^2 - AC^2$$

$$BA^2 = (BD + DC)^2 - AC^2$$

$$BA^2 = BD^2 + 2\,BD \times DC + DC^2 - AC^2$$

$$BA^2 = BD^2 + 2\,BD \times DC + DC^2 - (2\,EC)^2$$

$$BA^2 = BD^2 + 2\,BD \times DC + DC^2 - 4\,EC^2$$

$$BA^2 = BD^2 + 2\,BD \times DC + DC^2 - 2\,\left(2\,EC^2\right)$$

$$BA^2 \overset{(i)}{=} BD^2 + 2\,BD \times DC + DC^2 - 2\,\left(BD \times DC + DC^2\right)$$

$$BA^2 = BD^2 + \cancel{2\,BD \times DC} + DC^2 - \cancel{2\,BD \times DC} - 2\,DC^2$$

$$BA^2 = BD^2 + DC^2 - 2\,DC^2$$

$$BA^2 = BD^2 - DC^2 . \quad (ii)$$

Como $DC \neq 0$, então $DC^2 \neq 0$; logo, por (ii), podemos concluir que $BA^2 < BD^2$, pelo que $BA^2 - BD^2 < 0$ e, com isso, segue que:

$$BA^2 < BD^2$$

$$\sqrt{BA^2} < \sqrt{BD^2} . \quad (iii)$$

Mas observe que BA e BD são comprimentos de lados de triângulos; assim, $BA > 0$ e $BD > 0$.

Logo, segue de (iii) que $\boxed{BA < BD}$.

Dessa forma, o comprimento do segmento $\overline{BA}$ é de fato menor que o comprimento do segmento $\overline{BD}$, se E for o ponto médio do segmento $\overline{AC}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.