



.Problema para ajudar na escola: Divisores múltiplos



Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

Qual o número de divisores positivos de 15^{2017} que são múltiplos de 15^{2006} ?

Solução

Da fatoração de 15^{2017} , obtemos:

$$15^{2017} = (3 \times 5)^{2017} = 3^{2017} \times 5^{2017}.$$

- Assim, os **divisores** de 15^{2017} são da forma $3^n \times 5^m$, com $\begin{cases} 0 \leq n \leq 2017 \\ 0 \leq m \leq 2017 \end{cases}$. (i)

Por outro lado, temos que

$$15^{2006} = (3 \times 5)^{2006} = 3^{2006} \times 5^{2006}.$$

- Assim, os **múltiplos** de 15^{2006} são da forma $3^x \times 5^y$, com $\begin{cases} x \geq 2006 \\ y \geq 2006 \end{cases}$. (ii)

Por (i) e (ii), observamos que os divisores de 15^{2017} que são múltiplos 15^{2006} são da forma:

- $3^t \times 5^k$, com $\begin{cases} 2006 \leq t \leq 2017 \\ 2006 \leq k \leq 2017 \end{cases}$.

Para finalizar, perceba que existem $2017 - 2006 + 1 = 12$ escolhas para cada expoente t e k :

$$\frac{12}{\text{escolhas para } t} \quad \frac{12}{\text{escolhas para } k}$$

portanto, concluímos que existem $12 \times 12 = 144$ divisores de 15^{2017} que são múltiplos de 15^{2006} .

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Gincana de 2017 – Clubes de Matemática da OBMEP
Nível C – Questão Mediana