.Problema para ajudar na escola: Contando fatores iguais

Problema

(A partir da 1ª série do E. M.)

Sejam a, b, c números naturais, todos diferentes de 1 ($a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$).

Quantos grupos de três números a, b, c, nessa ordem, podemos montar tais que $\boxed{a \cdot b \cdot c = 7^{39}}$?

Solução

Como 7 é um número primo e a, b, c números naturais tais que $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$, então $a \cdot b \cdot c = 7^x \cdot 7^y \cdot 7^z$, com x, y, z números naturais não nulos.

Assim, o número de grupos de três números a, b, c, nessa ordem, será dado pelo número de grupos de três números naturais não nulos x, y, z, nessa ordem, tais $x + y + z = 39$.

A seguir, sem muita cerimônia, vamos contar quantos são os x, y, z.

- Se $x = 1$, temos as seguintes opções para y e z:

x	y	z
1	1	37
1	2	36
1	3	35
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1	37	1

Temos, então, $\boxed{37}$ possibilidades.

- Se $x = 2$, temos as seguintes opções para y e z:

x	y	z
2	1	36
2	2	35
2	3	34
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
2	36	1

Temos, então, $\boxed{36}$ possibilidades.

- Se $x = 3$, temos as seguintes opções para y e z:

x	y	z
3	1	35
3	2	34
3	3	33
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
3	35	1

Temos, então, $\boxed{35}$ possibilidades.

- $\vdots$

- Se $x = 35$, temos as seguintes opções para y e z:

x	y	z
35	1	3
35	2	2
35	3	1

Temos, então, $\boxed{3}$ possibilidades.

- Se $x=36$, temos as seguintes opções para y e z:

x	y	z
36	1	2
36	2	1

Temos, então, $\boxed{2}$ possibilidades.

- Se $x=37$, temos apenas uma opção para y e z:

x	y	z
37	1	1

Temos, então, $\boxed{1}$ possibilidade.

No total, temos finalmente $37+36+35+\cdots+3+2+1=\dfrac{(1+37)\cdot 37}{2}=19\times 37=703$ possibilidades; logo, temos $\boxed{703}$ grupos de três números que satisfazem as condições do problema.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Se você não se lembra da soma

$$1+2+3+\cdots+t=\frac{(1+t)\cdot t}{2},$$

clique **AQUI**.