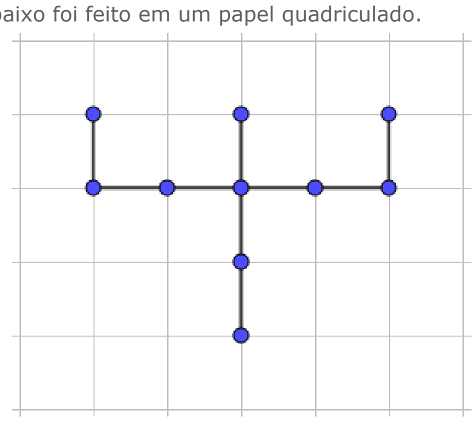
.Problema para ajudar na escola: Construindo triângulos

Problema

(A partir da 2ª série do E. M.)

(**OPM 2008** – adaptado) O desenho abaixo foi feito em um papel quadriculado.



Quantos triângulos com vértices nos pontos da figura desenhada é possível construir?

Ajuda

O **número de combinações de n elementos, tomados p a p,** é definido como o "número de maneiras possíveis de escolhermos p objetos a partir de n objetos disponíveis, sem que a ordem utilizada na escolha seja levada em consideração".

Esse número é representado pelos símbolos C_n^p ou $C_{n,p}$ e é dado por:

$$\boxed{C_n^p=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}}\ .$$

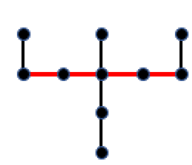
Solução

Sabemos que para definir um triângulo precisamos de três pontos não colineares; mas vamos inicialmente calcular o número de escolhas possíveis de três pontos quaisquer dentre os dez pontos apresentados, sem que a ordem de escolha seja levada em consideração:

$$C_{10}^3=\frac{10!}{(10-3)!\,3!}=\frac{\cancel{10!}}{\cancel{7!}\ 3!}=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2}=\boxed{120}\ .$$

Mas nestas 120 escolhas estão incluídas aquelas nas quais os três pontos são colineares, que sabemos não definirem um triângulo. Vamos então descontar desse total a quantidade de escolhas com três pontos colineares. Para isso, veja que temos três tipos de escolha de pontos colineares:

- **Os pontos que estão sobre o segmento vermelho indicado na figura ao lado**



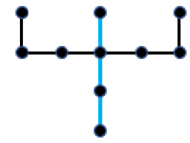
  Neste caso temos

$$C_5^3=\frac{5!}{(5-3)!\,3!}=\frac{\cancel{5!}}{2!\,\cancel{3!}}=\frac{5\times 4}{2}=\boxed{10}\ \text{escolhas.}$$

- **Os pontos que estão sobre o segmento azul indicado na segunda figura ao lado**

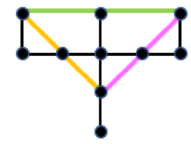
  Neste caso temos

  $$C_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!\,3!} = \frac{\cancel{4!}}{1!\,\cancel{3!}} = \boxed{4} \text{ escolhas.}$$



- **As escolhas coloridas indicadas na terceira figura ao lado**

  Neste caso temos $\boxed{3}$ escolhas.



Assim, contamos a mais $\boxed{10+4+3=17}$ escolhas, quando calculamos as 120 iniciais e, portanto, o número de triângulos que se pode construir com vértices nos pontos da figura é igual a $\boxed{120-17=103}$.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.