

.Problema para ajudar na escola: Cinco letras

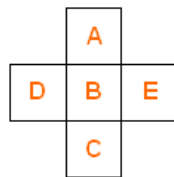


Problema

(A partir do 8º ano do E. F.)

Vamos substituir as letras A , B , C , D , E da figura abaixo pelos números 1, 2, 3, 4, 5, sem repetição, de modo que $A + B + C$ e $D + B + E$ sejam múltiplos de 3.

De quantas maneiras podemos fazer isso?



Lembretes

Duas propriedades envolvendo divisibilidade no conjunto dos números naturais podem ajudar.

Sejam a , b , p números naturais.

- Se a e b são múltiplos de p , então $a + b$ é também múltiplo de p .
- Se a e b são múltiplos de p e a diferença $a - b$ está definida em \mathbb{N} , então $a - b$ é também múltiplo de p .

Se for conveniente, dê uma passadinha **nesta Sala**, mais tarde!

Solução

Sabemos que $A + B + C$ e $D + B + E$ são múltiplos de 3; assim:

- ▶ a soma $(A + B + C) + (D + B + E)$ é também um múltiplo de 3.

Mas

$$(A + B + C) + (D + B + E) = \underbrace{(A + B + C + D + E)}_{1+2+3+4+5} + B = 15 + B$$

logo, $B = (A + B + C) + (D + B + E) - 15$.

Como $(A + B + C) + (D + B + E)$ e 15 são múltiplos de 3, então

- ▶ B é também um múltiplo de 3

e, dessa forma, a única possibilidade para B é $B = 3$, já que $B \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Mas cada soma $A + B + C$ e $D + B + E$ é um múltiplo de 3 e $B = 3$; portanto, podemos concluir que

- ▶ $A + C$ é um múltiplo de 3
- ▶ $D + E$ é um múltiplo de 3

uma vez que diferença de múltiplos de 3 é um múltiplo de 3.

Sendo $A + C$ um múltiplo de 3, temos então oito escolhas para os números A e C :

$$A = 1 \text{ e } C = 2$$

- $A = 1$ e $C = 4$,
- $A = 1$ e $C = 5$,
- $A = 2$ e $C = 1$,
- $A = 2$ e $C = 4$,
- $A = 4$ e $C = 2$,
- $A = 4$ e $C = 5$,
- $A = 5$ e $C = 1$,
- $A = 5$ e $C = 4$.

Conhecidos os valores de A e C , automaticamente saberemos quais são os dois valores possíveis para D e E ; no entanto, perceba que podemos associar esses dois valores de duas maneiras distintas: para D e E , nessa ordem, ou para E e D , nessa ordem.

$$\frac{1}{\text{escolha para B}} \quad \frac{8}{\text{escolhas para A e C}} \quad \frac{2}{\text{escolhas para D e E}}$$

Assim, o número de modos distintos de substituirmos as letras pelos números, de acordo com as regras apresentadas, é

$$1 \times 8 \times 2 = 16.$$

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Gincana de 2017 – Clubes de Matemática da OBMEP
Nível B – Questão Mediana

Feito com ♥ por Temas Graphene.



Apoio



Realização

