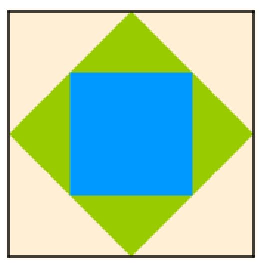
.Problema para ajudar na escola: Bandeirinhas coloridas

Problema

(A partir do 9º ano do E. F.)

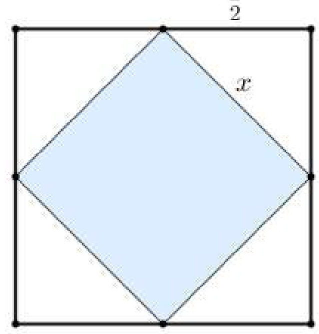
Uma fábrica produz vários modelos para bandeirinhas que podem ser utilizadas em festas de aniversário.
Bianca escolheu, para a sua festa de dez anos, bandeirinhas confeccionadas em quadrados de papel nos quais são desenhados dois quadrados coloridos de verde e de azul e cujos vértices são pontos médios dos lados dos quadrados nos quais estão inscritos, conforme mostra a figura.
Em cada bandeirinha, qual a fração que está colorida de azul?



Solução

Para resolver este problema, vamos precisar da relação entre a área de um quadrado e a área do quadrado definido pelos pontos médios do primeiro quadrado.

- Se você conhece o Teorema de Pitágoras, chame de l o comprimento dos lados do quadrado inicial.
  Ligando os pontos médios de dois lados adjacentes desse quadrado, obtemos um triângulo retângulo cujos catetos medem ambos $\frac{l}{2}$ e cuja hipotenusa é o lado do quadrado menor, de medida, digamos, x.
  Então, pelo Teorema de Pitágoras:



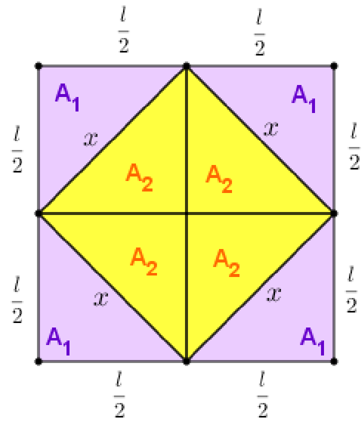
$$x^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$x^2 = \frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{2}.$$

  Sendo x e l medidas de lados de quadrados, $x > 0$ e $l > 0$; logo,

$$x = \sqrt{\frac{l^2}{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}}.$$

  Agora, observe que a área do quadrado interno é $x^2 = \boxed{\frac{l^2}{2}}$ e a área do quadrado inicial é $\boxed{l^2}$; assim, **a área do quadrado interno é metade da área do quadrado inicial.**
- Agora, se você não conhece o Teorema de Pitágoras, chame de l o comprimento dos lados do quadrado inicial e de x o comprimento dos lados do quadrado menor.
  Trace o segmento horizontal e o segmento vertical determinados pelos pontos médios do quadrado maior (vértices do quadrado menor) e observe que ficam definidos oito triângulos retângulos cujos catetos medem ambos $\frac{l}{2}$ e cuja hipotenusa mede x.



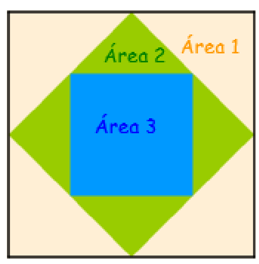
Esses oito triângulos são congruentes e cada um tem área $\dfrac{\frac{l}{2} \times \frac{l}{2}}{2} = \dfrac{l^2}{8}$; assim, $\boxed{A_1 = \dfrac{l^2}{8}}$ e $\boxed{A_2 = \dfrac{l^2}{8}}$. Desta forma segue que:

$$\boxed{\text{Área do quadrado maior}} = 4A_1 + 4A_2 = 8\frac{l^2}{8} = \boxed{l^2} \ ;$$

$$\boxed{\text{Área do quadrado menor}} = 4A_2 = 4\frac{l^2}{8} = \boxed{\frac{l^2}{2}} \ .$$

A primeira área já conhecíamos, pois sabemos que l é o comprimento dos lados do quadrado maior; mas a segunda área é a que permite concluir que **a área do quadrado interno é metade da área do quadrado inicial.**

Podemos resolver agora o problema; para isso, sejam **Área 1**, **Área 2** e **Área 3** as áreas dos três quadrados, conforme indica a figura abaixo.



Note que, se A é a área do quadrado maior, então:

Área 1$= A$

Área 2$= \dfrac{A}{2}$

Área 3$= \dfrac{\frac{A}{2}}{2} = \dfrac{A}{4}$.

Como em cada bandeirinha a área colorida de azul é Área 3 e a área da bandeirinha é Área 1, temos que um quarto de cada bandeirinha está colorida de azul.

Solução elaborada pelos **Moderadores do Blog**.

Feito com ❤ por Temas Graphene.

OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS
Somando novos talentos para o Brasil

Apoio

Realização